CAHIERS DE MATHEMATIQUE A L'USAGE DE MESSIEURS LES OFFICIERS DE...

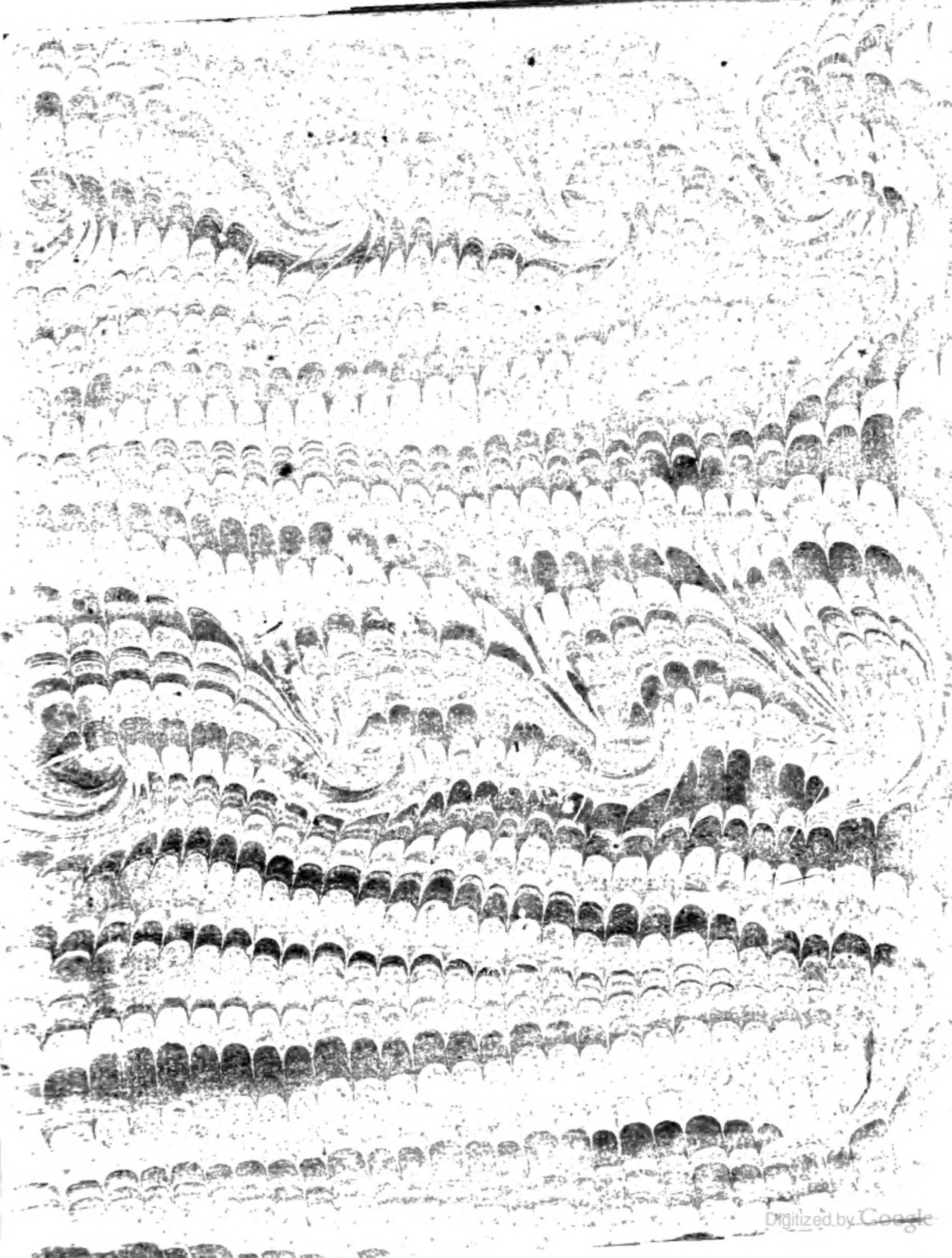
Johann Heinrich Herttenstein

FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XV 31-C-9
Palchetto
Num.° d' ordine 31 C 9

NAZIONALE
R. BIBLIOTECA
B. Prov.
VITT. EM. III
738
NAPOLI

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

B. G.
II
23

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

609916 SBN

TRAITÉ D'ARCHITECTURE CIVILE.

Digitized by Google

Digitized by Google

TRAITÉ D'ARCHITECTURE CIVILE.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Origine & du Progrès de l'Art de bâtir.

I.

L'INDIGENCE & le peu d'art des premiers hommes nous fait croire, qu'ils ne se régloient dans leurs Bâtimens, que par le besoin où ils étoient de se mettre à couvert eux & leurs bestiaux, avec ce qu'il leur falloit de provisions, des injures du tems & des insultes des bêtes sauvages. Ainsi quelque enclos & quelque couvert leur pouvoit suffire, & apparamment ils ne se servoient que des matieres, qui se présentoient sans beaucoup de recherche, telles que sont le bois, la terre, le chaume & la paille, &c.

II. Mais cette maniere de vivre n'ayant pû subsister qu'avec l'innocence des mœurs, il est évident que dès l'origine des societés civiles, les differens états & fonctions des hommes demandoient aussi des habitations differentes. Ceux qui tachoient de se mettre à l'abri des insultes des autres, avoient soin de donner plus de force à leurs

bâtimens. Ainsi on mit en usage les pierres, & à leur défaut la brique, le fer & les métaux moins rares. Et enfin l'ambition des hommes non contente du nécessaire, ni même de ce qui peut suffire à la seule commodité, se servit de l'art de bâtir, pour laisser aux siécles à venir des monumens de leur goût & de leur grandeur. Cependant le tems en a enseveli la plus grande partie dans l'oubli, ou du moins dans les ruines.

III. Il faut croire que l'Architecture étoit à son plus haut degré de perfection & de destination, lorsque Salomon fit bâtir ce Temple magnifique pour servir au culte du vrai Dieu. Si les conjectures de quelques Auteurs ont lieu, on pourroit soupçonner les Grecs d'avoir puisé dans cette source la perfection & la beauté de l'Architecture, dont ils se sont pourtant déclaré les inventeurs.

IV. Quoi qu'il en soit les Grecs & après eux les Romains ont cultivé cet art, & l'ont rendu excellent & admirable par l'harmonie de ses proportions, le bon goût de ses profils, la juste application & la richesse de ses ornemens, & la grande maniere autant dans le tout que dans les parties. Sa période a duré chez les Romains jusqu'à la décadence de leur Empire. Ce qui en reste est appellé aujourd'hui l'Architecture Antique.

V. Les Grecs modernes depuis l'Empire de l'Orient ont donné dans un goût pesant, en faisant les bâtimens trop massifs & peu éclairés; les Turcs sont encore dans ce même goût; on lui donne le nom d'Architecture Ancienne. Les modernes en ont tiré en partie l'idée des Dômes; mais le bon goût d'aujourd'hui les a corrigé considerablement. On profite de cette même maniere du goût des Arabes pour les Balcons & les Loges, & même de celui des Chinois pour d'autres décorations, qui font

Digitized by

naître cette varieté, qui fait une des grandes richesses & agrémens de la maniere de bâtir d'aujourd'hui.

VI. La décadence de l'Empire Romain causa aussi celle des beaux arts, où l'Architecture subit aussi un changement considerable. On introduisit l'Architecture Gothique, laquelle négligeant tout-à-fait les proportions & manquant le plus souvent contre les régles du dessein, semble avoir voulu recompenser ces défauts par un nombre infini d'ornemens très-deliés & une hardiesse particuliere, qui lui a reussi à faire des Tours hautes & légeres. On lui doit aussi les voûtes en tiers point ou d'Ogives. La liberté sans bornes, qui regne dans le Gothique, jointe à son trop d'ornemens, souvent mal exécutés, a donné occasion aux modernes de décrier sous le nom de Gothique tout ce qui est de mauvais goût en fait d'Architecture. Ceux qui se départent aujourd'hui de la simplicité des régles de la bonne Architecture pour chercher la légereté & la variation, employent toute leur adresse pour ne point donner dans le Gothique.

VII. Les sciences & les beaux arts ayant repris naissance en Europe sur la fin du 15. siécle, la bonne Architecture ne tarda pas long-tems à s'y relever de même. On retrouva les proportions & le bon goût dans les restes de l'Antiquité, & on tira ce bel art du tombeau des masures & des ruines que le tems n'avoit pas encore achevé à détruire. La majesté de cette Architecture antique triompha bien-tôt du Gothique, qui ne se soutenoit plus que par l'ignorance des Ouvriers, qui ne pouvoient pas d'abord se défaire des manieres qu'ils avoient apprises de leurs maîtres. L'Italie, qui avoit l'avantage de posseder la plûpart de ces prétieux monumens de l'Antiquité, fut aussi la premiere à produire d'habiles Architectes. On

ſuivit d'abord leur maniere de faire en France & en d'autre pays ; mais on a connu du depuis qu'une des grandes régles eſt de s'accommoder à ſon Climat. Cette Architecture ainſi reſtituée, quoique ſimple dans ſes principes, jointe à un bon goût de deſſein donne les variations infinies, qui diſtinguent les ouvrages d'aujourd'hui. Pour en donner les principes avec ordre, nous les réduirons en trois claſſes ; dont la premiere contient ce qui concerne la ſolidité des bâtimens, la ſeconde leur commodité, & la troiſiéme leur beauté.

CHAPITRE SECOND.

Du Fond & de ce qui concerne les Fondations.

I. POur rendre un Bâtiment ſolide il faut avoir égard au fond, aux matéreaux, & à la maniere de les mettre en œuvre. Quant au fond il eſt aiſé de connoître qu'il eſt aſſez ſolide, lorſque c'eſt du roc ou du tuf. Il l'eſt encore, lorſque c'eſt du bon gravier non remué. Lorſqu'on trouve un tel fond, on met les fondemens ſans aucune autre circonſtance, ſi ce n'eſt qu'on poſe audeſſous un rang de madriers de chêne, & on n'eſt pas même obligé de leur donner ſuivant la régle établie le ſixiéme de la hauteur du bâtiment. Mais lorſqu'on rencontre de la glaiſe, de la vaſe ou du ſable, on fait un pilotage, enfonçant des pieces de bois de chêne affilées par un bout, quelquefois armées d'un fer pointu juſqu'au refus du mouton. Quelquefois il ne faut point mettre ces pilotis trop près les uns des autres, ni les chaſſer trop avant, de peur de labourer le bon fond ; c'eſt pour la même raiſon qu'il

Fig. 1.

Digitized by Google

leur faut donner plûtôt des petits coups souvent réïterés que des forts qui dérangent la terre. S'il n'y a pas de fond ferme à esperer, on ôte du mauvais qui se présente, tant qu'on peut, après quoi on pose les fondations sur une grille faite de grandes pieces de bois, afin que tout presse également. Quelquefois quand on est obligé d'aller fort bas pour chercher le fond solide, on se contente de faire des piliers, qui soutiennent la fondation, & on peut même joindre ces piliers vers le bas par des arcs renversés, qui lieront tout, ensorte qu'aucun ne pourra manquer. Le bas des fondations doit être plus large, & aller ainsi en diminuant de part & d'autre jusqu'au rez de chaussée. Cet empattement se fait afin que tout le poids du bâtiment presse également sur une plus grande surface. Les régles que les Architectes donnent pour la largeur de cet empattement vont depuis un douziéme jusqu'au triple de l'épaisseur du mur. Ainsi le plus sûr est de consulter la charge & la pesanteur du bâtiment & la qualité du fond. On leur donne aussi quelquefois des contreforts ou éperons pour soutenir la poussée des terres. Les régles de cette poussée des terres contre les revêtemens sont amplement déduites dans les Mem. de l'Acad. R. des Sc. 1726. & 1727. Si les fondemens ont quelque faute elle se manifeste dans la suite par les crevasses des murs. Du reste on employe dans les fondations le libage & le plus gros moilon. On a soin de lier bien les joints de mortier, afin qu'il n'y reste aucun vuide. On employe même les gros libages en les liant les uns aux autres par leurs differentes surfaces, pour en faire un massif capable de soutenir les plus grandes masses de bâtimens. Il faut encore observer de faire les fondations d'allignement non à differentes reprises, & de leur donner assez de tems

Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7. & 8.

pour feicher avant que d'y poser le bâtiment. Il ne faut jamais bâtir sur un fond inégal, c'est-à-dire, partie de roche partie de terre, ni sur des vieux fondemens, à moins qu'on ne les aît bien examiné.

II. Lorsqu'on est obligé de bâtir dans l'eau, on s'y prend de differentes manieres. Ordinairement on détourne l'eau moyennant une digue ou bâtard d'eau. Après quoi on opere sur ce fond comme on trouve être nécessaire, soit en faisant un pilotage ou une grille, ou tous les deux ensemble ou autrement. Si le fond n'étoit que du sable, & qu'il faudroit bâtir un pont, on fondera les piles sur des grandes grilles, & si on pouvoit faire une grille de toute la longueur & largeur du pont & de ses axant becs à faire, on n'auroit qu'à la couvrir d'arcs renversés de maçonnerie, qui soutiendroient les piles. Lorsque l'on ne peut point détourner l'eau, on jette des pierres perduës, ou bien on fait couler le mortier par un canal fait de trois planches au fond de l'eau, & on y jette des grosses pierres ou moilons pour faire liaison dans le mortier, avec le plus de régularité qu'il se peut; le mortier ne laisse pas que de durcir dans l'eau, & le tout fait enfin corps. Il y a d'autres cas, où on descend des caisses remplies de bonne maçonnerie, que l'on arrange horizontalement les unes avec les autres pour faire un bon mur dans l'eau.

CHAP-

Digitized by Google

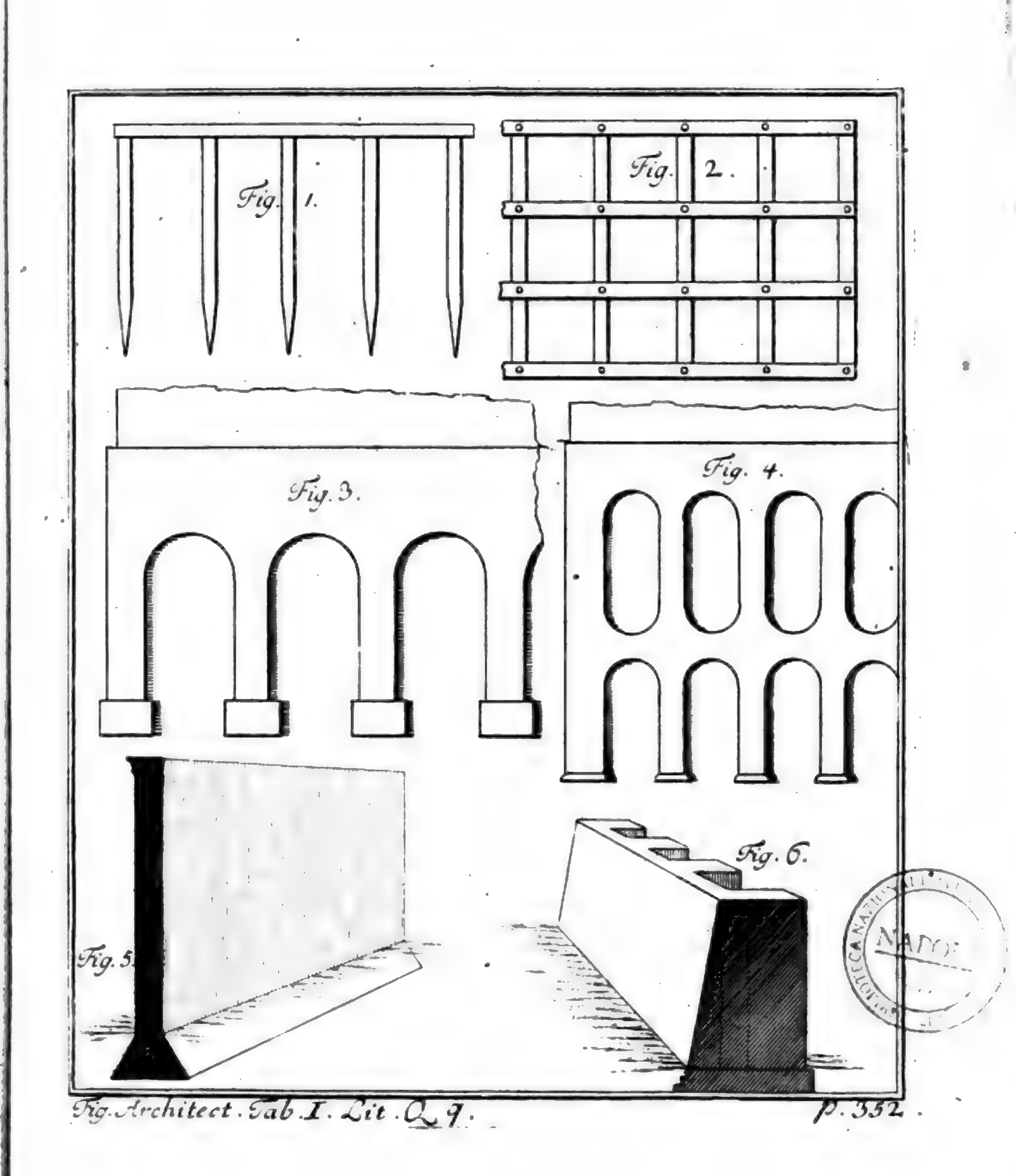


Fig. Architect. Tab. I. Lit. Q. 9.

BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI

CHAPITRE TROISIE'ME.

Des Matieres que l'on employe ordinairement aux Bâtimens.

I. LEs Matieres que l'on employe ordinairement pour faire des Bâtimens solides sont, la pierre, la brique, la chaux, le sable, le bois, le fer & le plomb. Quant à la pierre de taille on ne se trouve pas toujours en pays pour la choisir; & puisque son transport est cher, il faut souvent s'accommoder de ce qu'on a. Ainsi c'est à l'Architecte de connoître la bonne ou la mauvaise qualité de la pierre qui se présente, & d'en faire usage conformément à ce dont elle est capable. Si les carrieres dont elle se tire sont ouvertes de long-tems, on n'aura pas grande difficulté de voir de quelle maniere la pierre a réussi dans les bâtimens précedens. Si on n'en sçait point autrement la qualité, on l'essaye à l'eau-forte & à l'eau commune en la grattant avec des ciseaux; si elle se résoud en boüe, ou si étant laissée dans l'eau, elle en imbibe à augmenter considerablement de poids, c'est mauvaise marque, de même si elle saute ou s'éclatte dans le feu. On aime aussi à la laisser pendant une couple d'années à l'air, tant pour lui laisser jetter son eau de carriere, si elle en a, que pour connoître s'il y a de la moye ou partie molle, qui ne peut point résister à l'air. Les bonnes qualités de la pierre de taille sont, qu'elle résiste au fardeau & à l'eau, qu'elle soit vive, c'est-à-dire, qui se durcit aussi bien dedans que hors la carriere. Franche, qui ne tienne ni de la dureté du ciel, ni du tendre du moilon de la carriere. Pleine, sans cailloux, coquillage, ni moye.

Non trouée ou poreuſe. On connoît de ceci aiſément les deffauts, qui ſont aux pierres de ſoupié & de ſouchet, c'eſt-à-dire, du banc le plus bas, aux coquilleuſes & moyées. La pierre graſſe eſt celle, qui étant humide eſt ſujete à ſe gêler. La moulinée eſt celle qui eſt graveleuſe & s'égraine à la Lune ou à l'humidité. La feüilletée, qui ſe délite en feüilles à cauſe de la gêlée; & la feslée, qui eſt caſſée par une veine courrante, ſe connoiſſent au ſon ſous le marteau; ſi on la taille ſuivant cette veine, on l'appelle délitée, & elle ne ſert qu'à faire des arraſes; car géneralement la pierre doit être poſée ſur ſon lit de carriere dans un cour d'aſſiſes & non ſur ſon parement ou de lit en joint; ce deffaut s'appelle pierre en délit. La pierre gauche eſt celle dont les paremens & les côtés oppoſés ne ſe bornoyent pas, parce qu'ils ne ſont pas paralleles. Si on a à choiſir on employe la pierre dure aux marches, aux encoigneures, pas & seüils, &c. & la molle à la ſculpture & aux endroits de moindre réſiſtance.

II. Au deffaut de la pierre de taille ou pour ménager les frais, on employe la brique, qui a encore l'avantage de rendre le bâtiment plus léger, & par conſéquent plus durable. La bonne brique de même que la tuile ſe fait d'une terre douce & un peu graſſe, & qui ſoit ſans pierres & cailloux, que l'on en fait ſortir de même que les racines & autres matieres combuſtibles, en la faiſant paitrir ou corroyer avec ſoin. Enſuite on les forme dans les moules qui conviennent; ce qui ſe doit faire au Printems ou en Automne, & on les laiſſe ſecher le plus également ſous un couvert; & pour les garantir des gerſures qu'y pourroient cauſer le grand froid ou la trop grande chaleur du Soleil, on les couvre dans le premier cas

Digitized by Google

de ſable, & dans le ſecond de paille moüillée. Il eſt bon de leur donner juſqu'à deux ans à ſeicher avant de les mettre au four. Si la terre eſt trop ſabloneuſe, les briques deviennent lourdes & caſſantes; ſi elle eſt trop graſſe, les briques ſe gerſent en ſeichant; en ce cas on la corrige en y mêlant du ſable. Les petits cailloux rendent la brique inégale; il arrive de plus qu'ils ſe changent en chaux pendant la cuiſſon, laquelle s'enflant enſuite par l'humidité, fait que la brique creve. Les matieres combuſtibles ſe conſomment pendant la cuiſſon, & laiſſent des vuides, où enſuite l'eau entre & détruit la tuile. Les briques & les tuiles blanches ſont meilleures que les rouges. Si on les fait recuir après les avoir trempés dans l'eau, elles acquierent une dureté de grais, & peuvent bien ſervir dans les fondations.

III. La chaux ſe fait de pierres ou cailloux, que l'on calcine ou cuit dans un four. Enſuite on la détrempe avec de l'eau, & on y mêle du ſable pour en faire le mortier. On prétend, que la chaux faite de pierres pleines eſt bonne pour la maçonnerie, au lieu que les pierres ſpongieuſes en font une qui ſert mieux aux enduits, comme le ſtuc, &c. Les cailloux de riviere donnent une chaux, qui blanchit beaucoup. On donne ordinairement 60. heures à la cuiſſon; cependant il y a des pierres, qui ſe calcinent en moins de tems. L'humidité de l'air la diſſout, & la fait tomber en pouſſiere, qu'il ne faut point employer. On connoît que la chaux eſt bien cuite, ſi étant frappée du doigt, elle ſonne comme un pot de terre cuit. La cuiſſon doit réduire la pierre aux $\frac{2}{3}$ de ſon peſant. On fait auſſi une chaux de coquilles; mais les enduits qu'on en fait ſur des murs, qui ſont à découvert ſe détachent. Pour éteindre & détremper la chaux, il ne la

faut ni noyer ni brûler en y versant trop ou trop peu d'eau; mais l'on y en versera continuellement petit à petit jusqu'à ce qu'elle soit fonduë, après quoi on la broye suffisamment; ensuite on la fait couler dans une fosse faite en terre, & pour la conserver on la couvre d'un bon lit de sable pour lui ôter le moyen de s'éventer. On la garde de la sorte pendant plusieurs années, & elle gagne une consistence comme du fromage gras, & devient excellente pour faire liaison & pour les enduits, qui n'en gersent pas. Mais il faut avoir grand soin qu'elle reste toujours couverte, sans quoi elle s'éventeroit & deviendroit de nul usage; on l'essaye en la tranchant avec un couteau, auquel elle s'attache si elle n'est pas trop sêche. Il y a des pierres qui sont sujettes à s'écailler, dont la chaux ne souffre point que l'on la garde; au contraire il faut l'employer d'abord, autrement elle se brûle & devient de nul usage.

IV. Le sable doit être net, d'un grain égal & non terreux, ce qu'on connoît en le délayant dans de l'eau ou en le jettant sur du linge blanc, & s'il fait du bruit étant comprimé dans la main. Il faut qu'il soit de couleur; car le blanc a ses surfaces trop polies pour pouvoir faire liaison avec la chaux. Le sable des torrens ou des rivieres rapides est net à cause que les parties terreuses sont emportées. Celui que l'on trouve en terre est quelquefois gras ou terreux; cependant c'est selon les lits qu'on trouve. Celui de mer est bon; mais quelques-uns prétendent qu'il doit être lavé d'eau douce, au lieu que d'autres soutiennent le contraire, & disent même, que le mortier fait avec de l'eau de mer prend bien plus de consistence qu'avec l'eau douce seulement, la suye de cheminée, détrempée dans l'eau, fait la même chose. Si l'on y dissoud du

Digitized by Google

sel armoniac, le mortier prend aussi promptement que le plâtre. Il ne faut pas que le sable reste long-tems exposé à l'air, de sorte qu'il y croît des mauvaises herbes; il en devient terreux, & le bâtiment en peut contracter du dégât. On met ordinairement $\frac{2}{3}$ de sable avec $\frac{1}{3}$ de chaux pour faire le mortier. Quelquefois on met le sable dans la chaux éteinte pendant qu'elle est encore chaude, & on l'employe tout aussitôt. Mais si la chaux est déja éteinte de quelque tems, on n'y doit mettre que très-peu d'eau, parce qu'elle devient fluide pendant qu'on la corroye; l'eau qu'on y employe doit être claire & sans parties de terre. On doit employer le mortier un peu plus fluide avec les pierres qui tiennent l'eau, qu'avec celles qui tiennent de la nature des cailloux. Pour les ouvrages de conséquence comme sont des chappes, des voûtes souterraines, &c. on se sert de ciment, lequel est composé de chaux & de tuileaux réduits en poussiere, que l'on passe par le tamis; quelques-uns y mêlent de ces petites écailles de fer, qui tombent au pied de l'enclume des forgerons. Le meilleur est de le faire chaud, & de s'en servir sur le champ.

V. Les bois dont on se sert dans les bâtimens y sont employés selon leurs differentes qualités. Pour les abbatre il faut choisir des arbres qui ne soient ni trop jeunes, ni sur leur retour, ni encore moins morts sur pied; lesquels on coupe en Automne ou en Hyver jusques vers le milieu, afin que la seve, qui s'y trouve, s'en écoule; après quoi on les abbât tout-à-fait, & on a soin de les faire sêcher sans les exposer aux grandes chaleurs. Il ne faut se servir du bois que long-tems après qu'il est abbatu, pour lui donner tout le loisir de sêcher. Le chêne à cause de sa dureté est employé où il faut de la fer-

meté; il durcit dans l'eau; mais se trouvant sans air dans la maçonnerie, il s'échauffe souvent & se corrompt; on n'en peut point faire des solives longues, elles se courbent & même se brisent. Le frêne, le noyer & le chatagner sont des bois très-durables pour des édifices. L'orme est meilleur pour le charonage, le cyprès pour les meubles, l'aune pourrit facilement dans la terre, au lieu qu'il se conserve parfaitement bien dans l'eau; on en fait des tuyaux. Le sapin est le plus leger; mais il se corrompt facilement; il sert à de très-grands ouvrages. Nous ne parlerons point de plusieurs autres especes de bois, que l'on destine à differens usages de menuserie, sculpture, &c. suivant leur plus ou moins de dureté, & suivant que leur fil est plus ou moins fin.

VI. Le fer qui sert à la solidité des bâtimens est réputé gros fer, comme sont les tirans, ancres, linteaux, platebandes, boulons, manteaux de cheminée, barres de tremie. Celui qui n'est que pour la fermeture & sûreté est appellé fer de menus ouvrages; cependant les barreaux des croisées & les barres & fleaux des portes sont de gros fer. Les Anciens se sont servi de bronze pour rendre les bâtimens solides. Dans les Edifices Gothiques le grand usage de fer aide beaucoup à cette légereté, qui se trouve dans les meilleurs de ces ouvrages. L'employ du fer dans les bâtimens doit être très-judicieux pour n'en mettre que dans les endroits qui en ont besoin, & d'une grosseur convenable, tant à cause de la dépense que parce qu'il divise la liaison dans les petits murs. Il en faut pour cette même raison plûtôt dans des grands bâtimens que dans des petits. Lorsqu'il est enfermé dans la maçonnerie, l'humidité qui pénetre les murs le rend sujet à la roüille, laquelle se jette quelquefois dehors & fait un vilain as-

Digitized by Google

pect, ce qui arrive quand même on enveloperoit le fer de lames minces de plomb. Il est outre cela sujet à se casser aisément dans les grandes gêlées. Il est principalement nécessaire pour empêcher les arcs & les platebandes de s'écarter; aussi est-ce le seul remede pour retenir les Edifices, qui menacent ruine. On l'employe pour les plus grosses pieces de la grosseur seulement de 12. à 15. lignes; car on remarque que ces pieces ne manquent jamais par leur grosseur, mais bien par l'œil ou crochet, lorsqu'ils ne sont pas bien forgés. Les barres de tremie sont de fer plat de 3. po. de large sur 6. lignes d'épaisseur.

VII. Le plomb sert à la solidité des bâtimens, puisqu'on scelle les pierres en plomb avec des boulons, goujons ou crampons de fer. Du reste il y a 3. sortes de plomb; le noir, le blanc & le cendré. Le noir est mol & pesant, le blanc est dur & léger, & le cendré est encore plus dur, mais sa pesanteur est moyenne. Le plomb sert quelquefois en tables minces pour les jointes des pierres & des marbres. Nous ne disons rien ici de l'usage du plomb pour la couverture des combles & pour les ornemens.

CHAPITRE QUATRIE'ME.

De la maniere de mettre les Matereaux en Oeuvre.

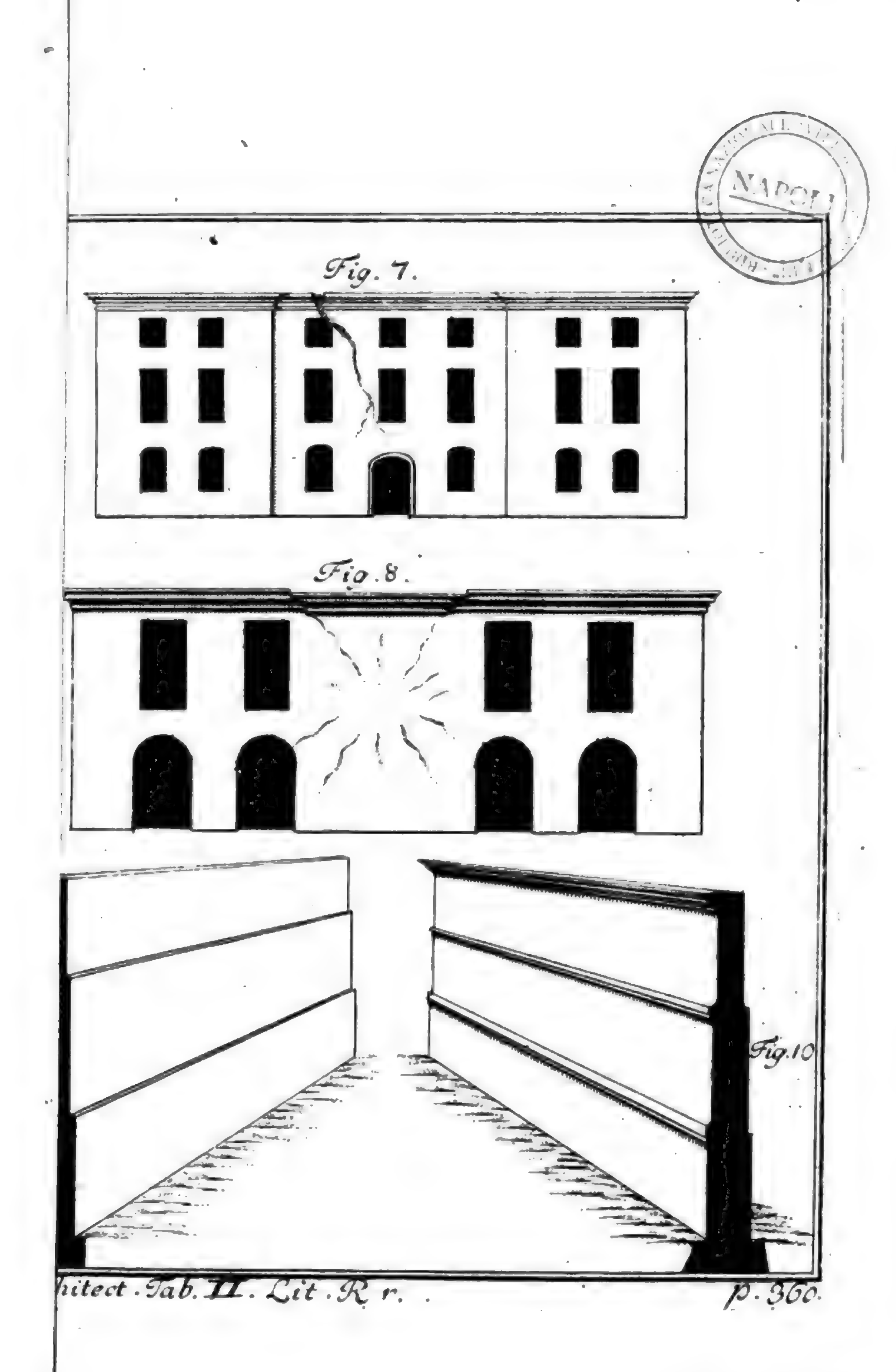
I. LEs murs sont ou de pierre ou de brique. La pierre est ou brute ou taillée. Ceci avec la destination du mur & par conséquent son épaisseur fait naître une grande difference dans la construction des murs. Generalement il faut avoir grand soin de les faire de bonne liaison, de sorte que les joints montans soient recouverts

de pieces entieres pour obvier aux crevaſſes; que les encoignures ſoient garnies de grandes pierres, qui avancent aſſez loin de part & d'autre dans les murs. Les pierres de taille ſe poſent quelquefois à crû les frottant l'une ſur l'autre, ou on met des tables de plomb entre deux. Si les deux paremens d'un mur doivent être de pierre de taille, on y en met par-ci par là, qui font parpain principalement dans les fondations, & on remplit le reſte de menuë maçonnerie; ou bien on lie les deux paremens de tems en tems de crampons de fer. Si ce n'eſt que le parement extérieur, qui doit être de pierre de taille, on le fait d'aſſiſes alternatives de carreaux & de boutiſſe. Dans les murs de pierre brute on laiſſe regner de diſtance en diſtance quelques aſſiſes de brique, pour faire meilleur liaiſon. Les premieres aſſiſes des murailles hors de terre doivent être de pierres dures, afin qu'elles puiſſent réſiſter à la pluye & à l'humidité de la terre. Du reſte les murs doivent être bâtis bien perpendiculairement, & on y fait des diminutions par retraites, leſquelles on devroit faire en partie par dehors, & cacher moyennant des plinthes qui regnent à chaque étage; mais on les fait le plus ſouvent en dedans, parce qu'elles s'y cachent plus facilement. La ſolidité demande que dans les murs qu'on doit percer de croiſées & de portes, les ouvertures ne ſoient pas trop près des angles, & que le vuide réponde ſur le vuide, & le plein ſur le plein.

Fig. 9. & 10.

II. La partie la plus conſiderable en fait de maçonnerie, & qui tient le plus de la ſcience, eſt la coupe des pierres; moyennant laquelle on accomode les pierres, qui doivent former les platebandes, arcs, voûtes, eſcaliers, &c. de maniere que ces ſtructures hardies ayent toute la fermeté poſſible. Ces ſortes de pierres ſont ordinairement des eſpeces

Digitized by Google



NAPOLI
Digitized by Google

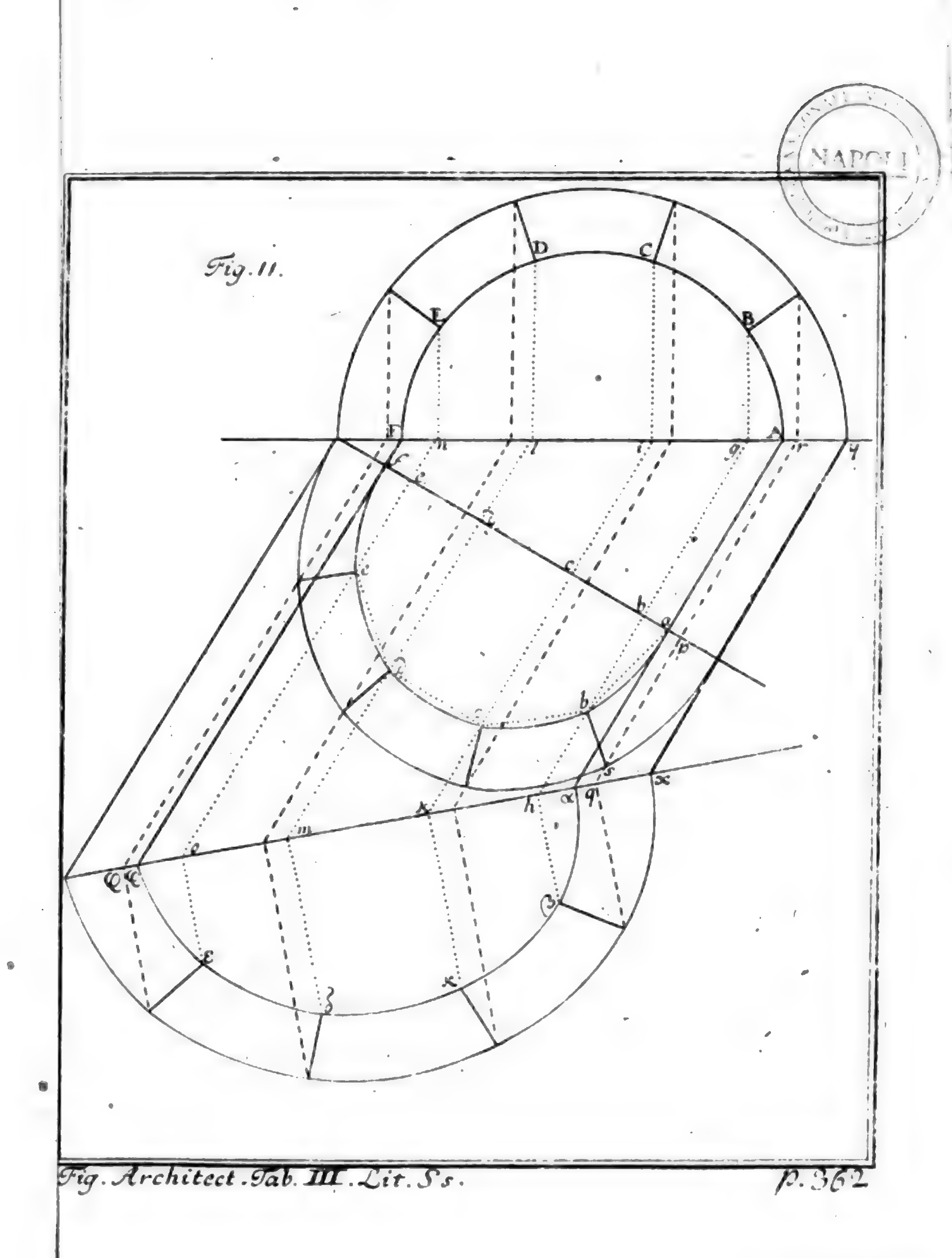
Digitized by Google

peces de prismes à 6. faces ou paremens, dont la concave s'appelle Doüelle de l'intrados, & son opposée l'extrados; celle qui paroît & son opposée s'appellent simplement faces ou têtes; & les deux qui touchent les claveaux ou voussoirs voisins, s'appellent panneaux de lits. Ces surfaces se déterminent moyennant le plan & le profil de l'ouvrage à faire, & cela ou par équarisement ou par panneaux. Nous ferons voir cette derniere maniere par un seul échantillon qu'on nomme, le biais passé. Soit, par exemple, une voûte dont le plan est A*α*φF, dont on suppose que l'arc qui est sur la ligne AF se doit présenter en plein ceintre. Pour cet effet soient les retombées AB, EF, les voussoirs BC, DE, la clef CD, faites tomber des points B, C, D, E, les perpendiculaires B*g*, C*i*, D*l*, E*n*, & tirez par les points *g*, *i*, *l*, *n*, les lignes *gh*, *ik*, *lm*, *no*, parallele A*α*, élevez aux points *h*, *k*, *m*, *o*, les perpendiculaires *h*ϐ *k*κ, *m*δ, *o*ε, égales à leurs correspondentes du plein ceintre, & joignant les points *α*, ϐ, κ, δ, ε, φ, il est évident que de ce côté ici l'arc sera surbaissé. Mais si l'on tire dans le plan proposé une ligne perpendiculaire à A*α*, &c. & que l'on porte les mêmes hauteurs comme tantôt en *b*, *c*, *d*, *e*, on trouvera que l'intérieur de la voûte sera un arc surhaussé. La même chose se fait pour l'extrados. On conçoit encore que dans le présent cas $gh = B\beta$, $ik = C\kappa$, $lm = D\delta$, $no = E\varepsilon$, & c'est ce qui servira à déterminer l'intrados & chaque panneau de lit des voussoirs proposés. Car posant sur une ligne droite le développement de la voûte *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, si on y porte perpendiculairement de part & d'autre *αα* & *a*A, de même que *bh* & *bg*, le plan A*αhg* sera celui qui soutend la retombée AB, son lit sur le piédroit de la voûte sera le plan A*αxy*, pour déterm ner son autre lit qui Fig. 11. Fig. 12.

joint le voussoir BC, on portera la ligne *bs*, sur la ligne du développement, de *b* en *s* ou *p*, de part & d'autre *pq* & *pr*, on aura le plan *hgrq*, qui sera le panneau de lit cherché, & ainsi des autres. Si le trait est difficile, on forme de cette façon les épures, que l'on applique ensuite sur la pierre à couper; sans cela on ne travaille qu'avec la fausse équerre, la sauterelle, le beuveau, &c. La connoissance de la coupe des pierres sert à la construction de toutes sortes d'arcs rampans, biais, corne de bœuf, aux platebandes & abajours tant droits que bombés, aux portes percées, en tour ronde ou tour creuse, dans l'angle ou sur le coin, aux arriere-voussures soit de Marseille ou de S. Antoine; comme aussi à la construction des voûtes qui sont en cul de four, en berceau, d'arrête ou deux berceaux qui s'entrecoupent; en arc de cloitre, qui ont au lieu d'arrêtes des angles rentrans; en tiers points ou d'Ogives autrement Gothiques; comme aussi aux berceaux coupés par des lunettes, ou moindres berceaux; aux voûtes, sur un noyau; aux pendentifs ou panaches, qui soutiennent des Domes; aux trompes dans l'angle ou sur le coin en coquille; aux vis à noyau & vis de S. Gilles; aux escaliers à vis suspenduë; aux descentes droites, en tour rondes & tournoyantes, &c. La poussée des voûtes est cause qu'on donne plus de force à leurs piédroits en augmentant leur épaisseur. Voici la régle que l'on a observé à peu près jusqu'ici dans la pratique : On divise l'arc de la voûte en plein ceintre, en trois parties égales, en tirant l'une des cordes au delà de la naissance de la voûte, on porte sur ce prolongement la longueur de ladite corde, & le point extréme détermine l'épaisseur du piédroit, qui par conséquent dans ce cas devient le quart de l'ouverture de la voûte. Cette régle ne peut

Fig. 13.

Digitized by Google



NAPOLI

Fig. Architect. Tab. III. Lit. S s.

p. 362

Digitized by Google

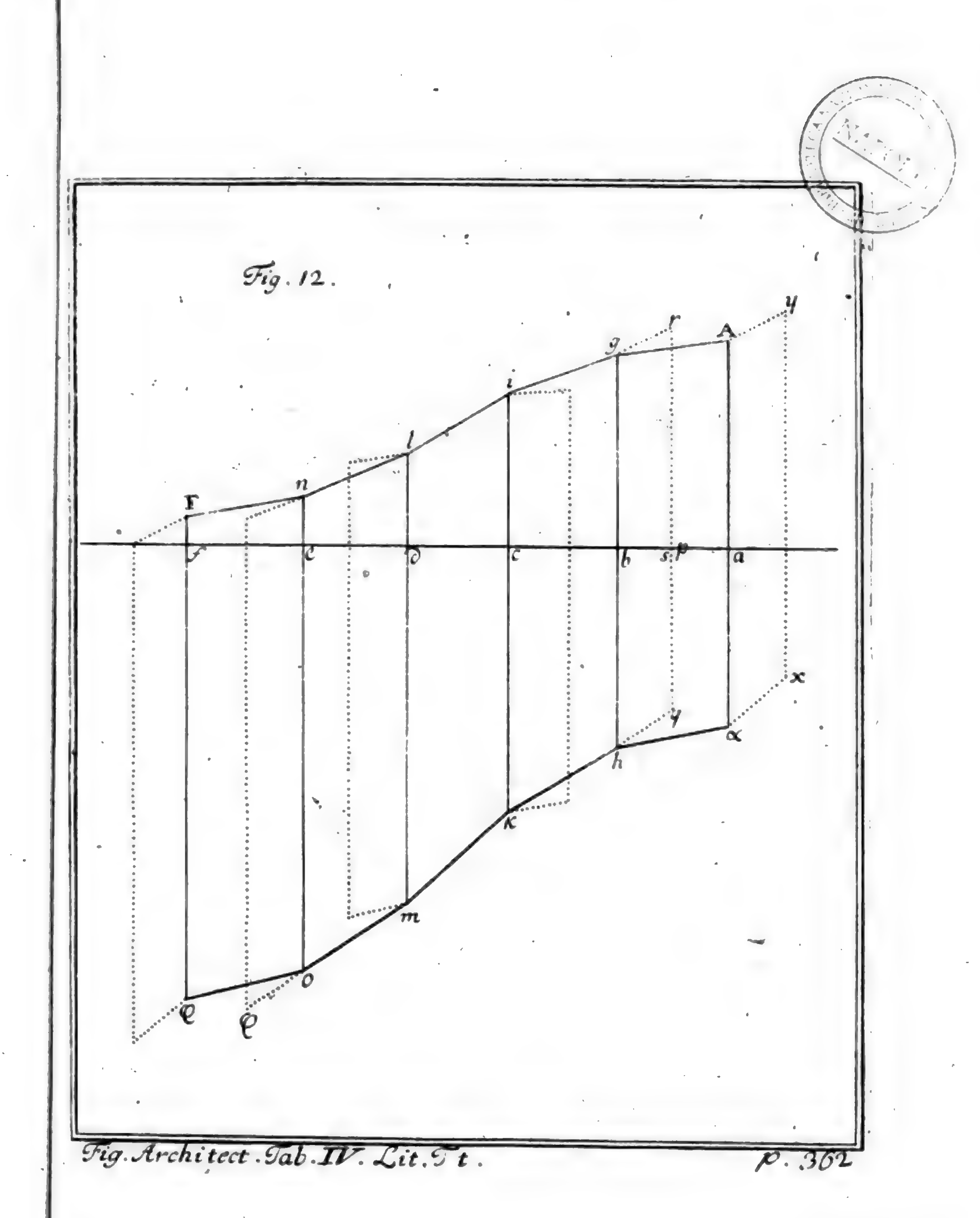


Fig. Architect. Tab. IV. Lit. Tt.

Digitized by Google

ſervir qu'aux berceaux, qui n'ont pas beaucoup de hauteur & de largeur. On aide à celles qui ſont plus hautes & à celles d'arrêtes ou d'Ogives par des éperons ou contreforts placés au-droit des retombées, ou par des bas côtés & des arcs-boutants : En ce cas les piliers peuvent n'avoir que la ſixiéme partie de l'ouverture ou largeur de la grande voûte. Cette matiere de la pouſſée des voûtes, de même que celle de la force des ceintres ſe trouvent réduites à une theorie très-exacte dans les Mem. de l'Acad. R. des Sc. aux années 1712. 1726. 1729. & 1730. On doit régler l'épaiſſeur des murs ſur la bonté des matereaux dont on ſe ſert. Ceux qui ne ſoutiennent pas de voûte ſont de 2. pieds au rez de chauſſée; ſi les matereaux ſont bons, on les diminuë d'un pouce par toiſe. Les murs mitoyens n'ont que 18 pouces d'épaiſſeur, mais ceux qui ſoutiennent des voûtes ont 5. à 6. pi. ſur 10. ou 12. toiſes de hauteur, encore faut-il qu'ils ſoient de pierre de taille. Les eſcaliers ſont encore un des principaux traits; mais puiſqu'ils regardent proprement la comodité nous en parlerons ailleurs.

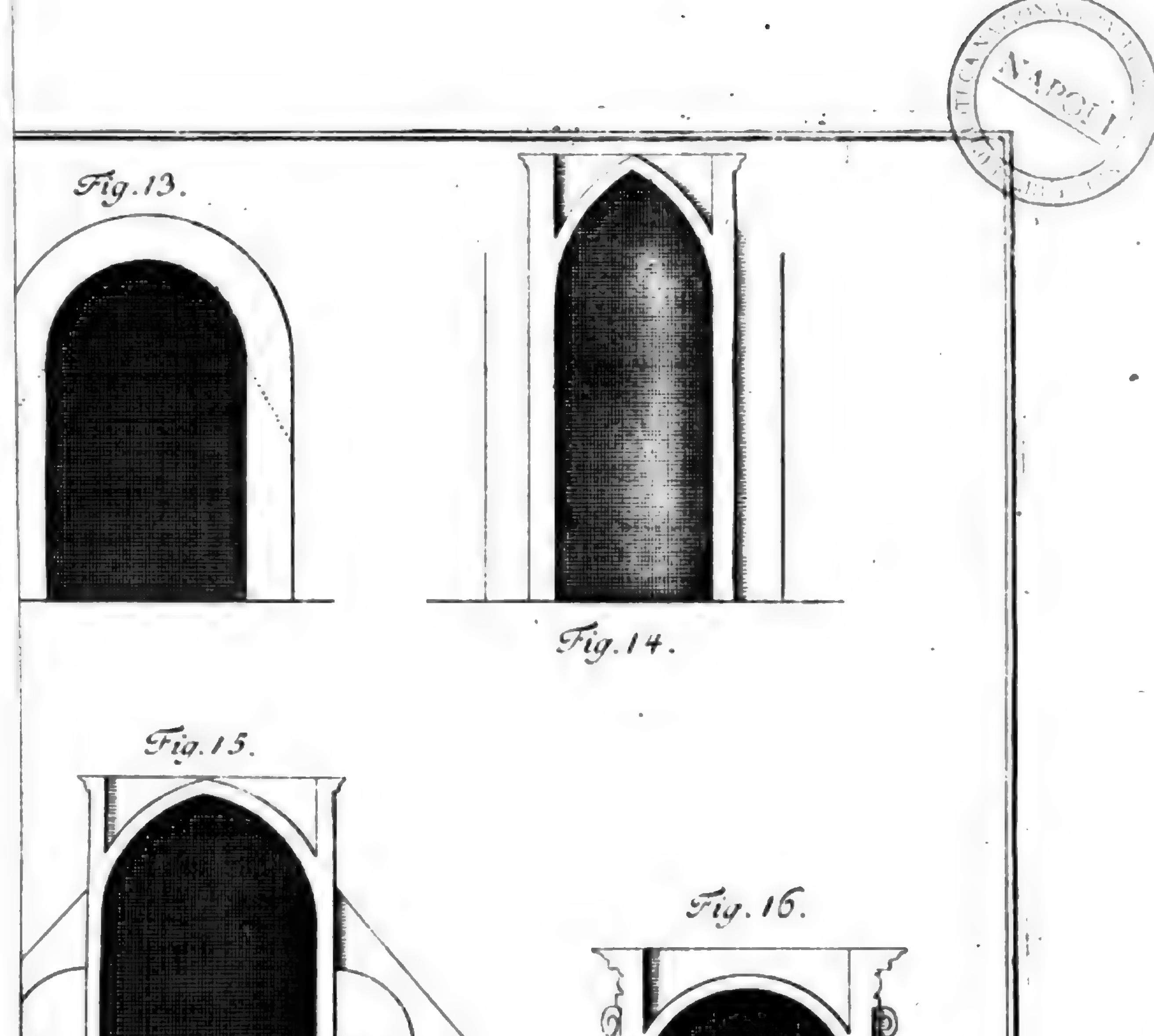
Fig. 14.

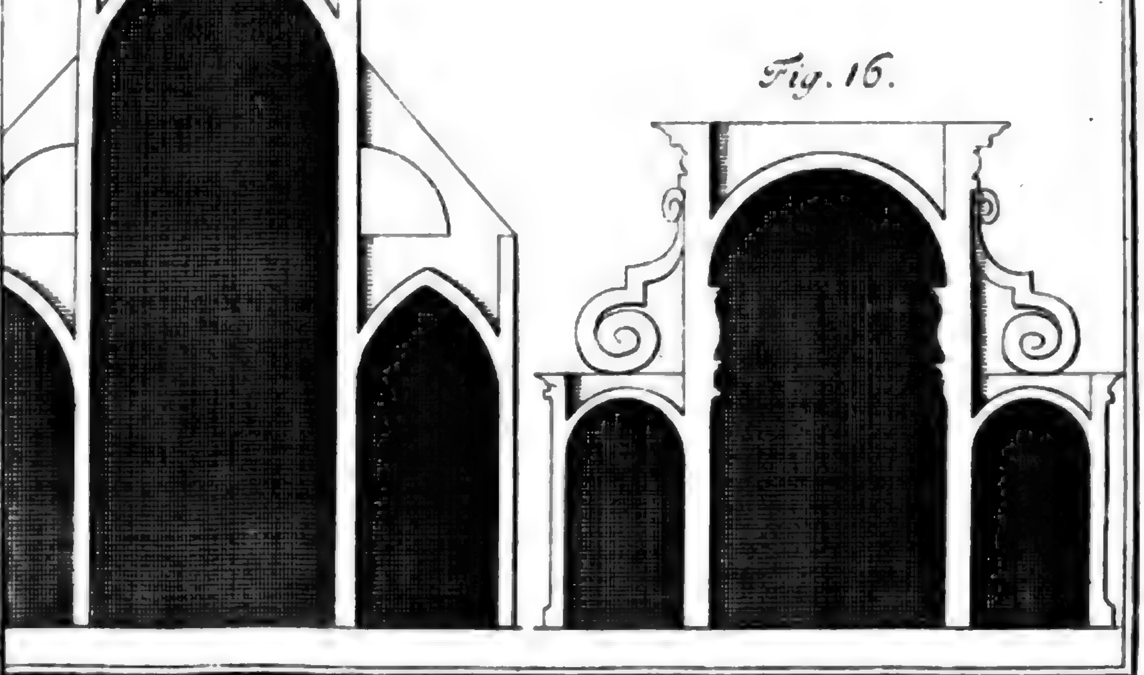
Fig. 15. & 16.

III. Le principal uſage du bois de charpente dans les bâtimens eſt pour les planchers & les combles. Si on fait des cloiſons pour les ſéparations du dedans, ou même dans les moindres édifices le devant d'un pan de bois, ce n'eſt que pour ménager la place & la dépenſe. Dans tout ceci il faut remarquer, que le bois doit être bien équarry ſans flache & ſans aubier, qui met la pourriture à toute la piece. Quant aux poutres, qui doivent ſoutenir un fardeau, comme un plancher, pour trouver l'épaiſſeur qui leur convient, on donne pour régle, qu'il faut multiplier le double de leur longueur en pieds par la racine d'une fois cette longueur, & on aura une ſur-

face, que l'on conçoit être la tête de la poutre en pouces quarrés; dont si on détermine un côté à discretion l'autre se trouve par la division. Mais comme ces poutres ou solives se posent toujours de champ, il est évident qu'une poutre qui a plus de champ portera mieux qu'une autre qui en a moins, les surfaces des deux têtes étant d'ailleurs égales; outre que le moins de largeur des poutres se peut recompenser en les mettant plus près les unes des autres; le plus serré est tant plein que vuide. La plus grande force des poutres est lorsque les côtés de leurs écarrisages sont entre eux en raison de 1 : $\sqrt{2}$. De plus pour comparer la force des deux poutres il faut remarquer qu'elles sont entre elles en raison composée de la simple des bases de leurs écarrisages, de la doublée des hauteurs desdits écarrisages & de l'inverse de leurs longueurs. Les expériences qu'on a fait pour rechercher la derniere force des poutres ont fait conclure que pour rompre par le milieu une poutre de bois de chêne de 12. sur 15. po. d'écarrisage, & de 24. pi. de long arrêtée ou serrée par ses deux bouts, il faudroit 106200. liv. pesant. D'où on peut tirer le reste. Si elle n'étoit que posée sur les deux bouts, il en faudroit rabattre un tiers. Il est évident que ceci nous éloigne beaucoup de la régle proposée ci-dessus, & qu'il y auroit même considerablement trop, si on suivoit cette autre, qui met les solives d'un plancher de 9. à 15. pi. de long, à 5. sur 7. po. d'écarrisage. celle de 18. pi. à 6. sur 8. po. celles de 21. pieds à 8. sur 9. po. celle de 25. pi. à 9. sur 10. & celles de 27. pi. à 10.
Fig. 17. sur 11. po. Lorsqu'une piece de bois n'est pas assez forte on y joint une autre par entaille, & on les joint par trois étriers ou liens de fer. On peut encore faire à peu
Fig. 18. près la même chose pour joindre deux pieces de bois,

Digitized by Google





Architect. Tab. V. Lit. Vu. p. 364

NAPOLI

lorſqu'une ſeule n'a pas la longueur requiſe. On a inventé de faire un plancher par une eſpece d'entrelas ou enchevêtrures réïterées de pieces de bois, qui ne ſont pas aſſez longues pour appuyer de part & d'autre ſur les pans opposées ; mais on n'en peut gueres eſperer de ſolidité & de bon aſſemblage dans l'exécution. Ainſi lorſqu'il s'agit de faire un plancher, qui doit ſervir de plafond à un grand vaiſſeau, comme par exemple, à une Egliſe, le plus sûr eſt de faire enſorte, que dans le comble il y ait des jambes de force qui ſoutiennent des poinçons, au bas deſquels ſe trouve attachée une poutre, qui reçoit les têtes des poutres ou ſolives, qui forment le plancher; on y fait des liens de fer pour rendre l'ouvrage plus ſubtil. Quant aux combles on les fait differemment; les uns ſont droits ou à deux égouts, d'autres briſés ou coupés à la Manſarde, d'autres à l'Impériale, d'autres en Dôme. Ordinairement il y a à tous ces combles des plateformes poſées ſur le maſſif du mur, qui ſe lient de part & d'autre par les tirans pour empêcher la pouſſée des combles. Elles ſont ſurmontées de jambes de force, entre leſquels il y a des entraits, auſquels les mêmes jambes de force ſont encore attachées par des eſſeliers ou liens. Ceci ſert encore à ſoutenir les chevrons, ſur leſquels on cloüe des lattes, qui portent les tuiles. Cependant les circonſtances de differens combles à bâtir changent la conſtruction en pluſieurs manieres. C'eſt encore la même choſe pour les pans de bois, dans leſquels il ſe faut régler ſuivant les ouvertures qui ſont preſcrites. Les pieces principales de ces pans ſont les ſablieres, qui reçoivent les poteaux, le reſte ſe remplit par des décharges, des Croix de St. André, potelets & autres. Les eſcaliers de bois qui tournent à jour dans une cage, enſorte que les

Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.

marches portent du côté du vuide dans un limon ou une courbe rampante d'un assemblage tel qu'il n'y ait autre fer que les boulons qui retiennent les rampes dans les murs de la cage sont un des plus difficiles ouvrages de la charpenterie.

CHAPITRE CINQUIE'ME.
De la Commodité des Bâtimens.

I. UN Bâtiment est commode, lorsque le tout & ses parties sont situés de façon qu'on y peut expédier avec le moins d'empêchement toutes les fonctions ausquelles il est destiné. Cette destination fait que les bâtimens sont ou publics ou accommodés à l'habitation des hommes. Les bâtimens publics des Anciens, où ils étaloient toute leur magnificence, étoient leurs Temples, Theatres, Amphitheatres, Basiliques, Bains publics, Xystes & Palestres, &c. Aujourd'hui la grandeur des Theatres se réduit à peu de chose; l'usage des Palestres & des Bains publics cesse. Au lieu des Basiliques il y a des Palais & des Bourses; & la disposition de nos Eglises est beaucoup differente des Temples des Payens. Quant aux bâtimens déstinés à l'habitation des hommes, ce sont ou des Palais de Prince, ou des habitations particulieres, & celles-ci sont ou des habitations de ville ou des maisons de campagne; dans celles-ci on a ordinairement la place à choisir, au lieu que dans la ville on se trouve dans une grande contrainte.

II. La premiere commodité de certaines pieces se trouve dans leur exposition vers l'air & le Soleil. Ainsi les sales à manger en hyver & les bains doivent regarder le couchant d'hyver à cause du jour & de la chaleur. Les cham-

Digitized by

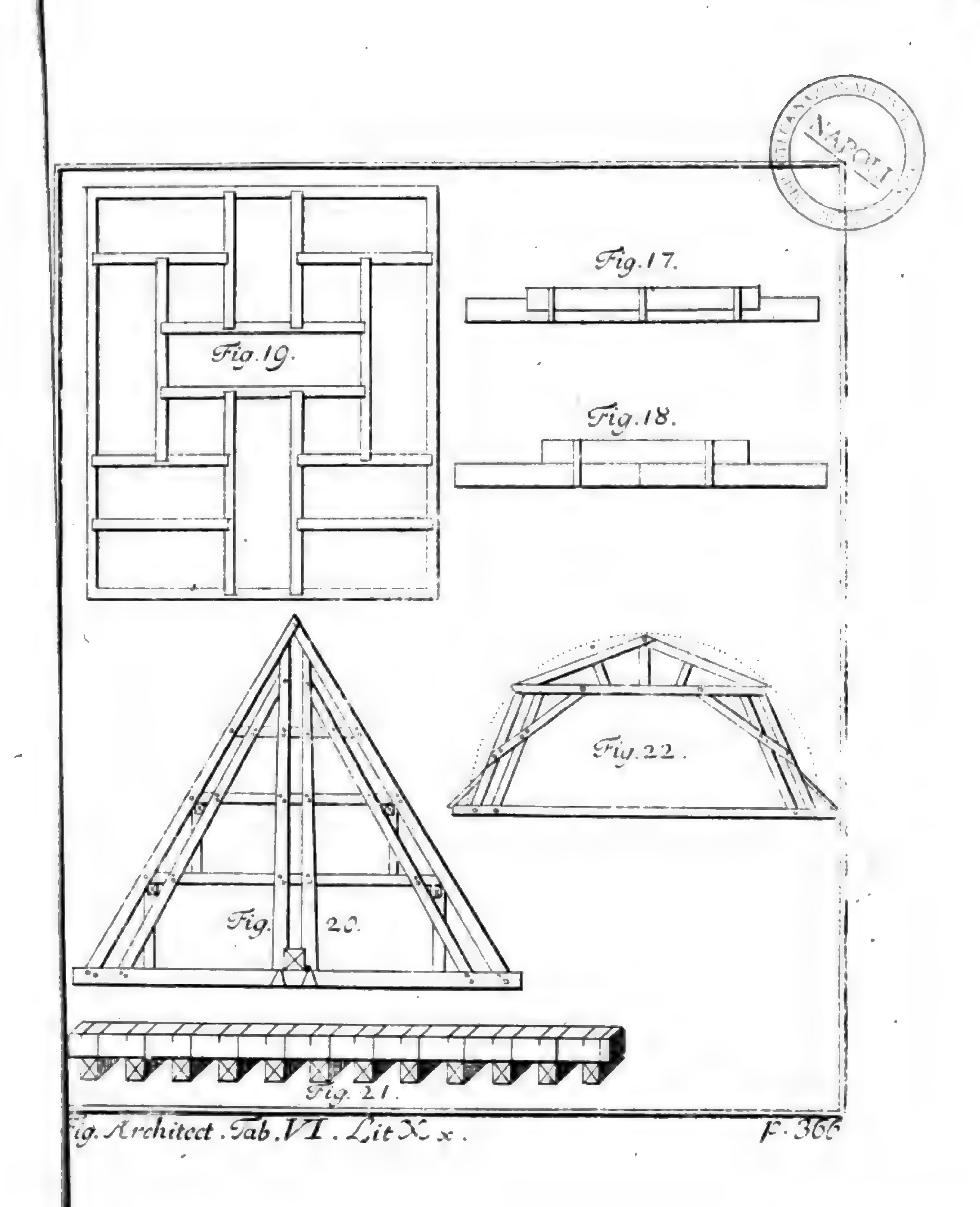


Fig. Architect. Tab. VI. Lit X. x.

p. 366

Digitized by Google

bres & les Bibliotheques doivent être tournées au Soleil levant, tant à cauſe du jour que du vent ſec, qui conſerve les livres. Les Sales à manger du Printems & de l'Automne regardent l'orient, parce qu'on les peut entretenir temperées. Les Sales pour l'Eté regardent le ſeptentrion, comme auſſi les cabinets de tableaux & les atteliers des Brodeurs & des Peintres, à cauſe de la fraicheur & de l'égalité du jour. Ainſi il faut éloigner du bruit les lieux de méditation & de repos. Dans les édifices de Ville il faut ſur tout prendre garde qu'ils ſoient bien éclairées; puiſque les maiſons voiſines ſont ſouvent aſſez proches & aſſez hautes pour cauſer de l'obſcurité. Afin de connoître ſi on aura aſſez de jour, on n'a qu'à tendre une corde à l'endroit où l'on ſe propoſe d'élever le linteau d'une fenêtre ou plancher, & regarder ſi entre cette corde & le mur, qui cauſe un obſtacle, on voit un eſpace aſſez conſiderable du Ciel; & il faudra ſi bien diſpoſer les choſes que les fenêtres ſoient faites aux endroits, où le Ciel ſe voit à découvert. Cela ſe doit principalement obſerver aux ſales à manger, aux chambres, ſur-tout aux paſſages & eſcaliers, qui ont grand beſoin d'être éclairés à cauſe qu'en ces lieux pluſieurs perſonnes, & qui ſouvent ſont chargées, ont accoutumé de ſe rencontrer l'un devant l'autre.

III. L'eau eſt encore une des grandes commodités de la vie. Il y en a de trois ſortes, qui ſont l'eau de riviere, l'eau de puits & de fontaine, & l'eau de pluye. L'eau eſt bonne, lorſqu'elle n'eſt point mêlée de parties nuiſibles à la ſanté. On a trouvé par pluſieurs expériences que ni la légereté, ni la clarté, ni lorſqu'on n'y trouve point de goût, ni la facilité qu'elle a à s'échauffer & à ſe réfroidir, ne ſont pas des marques aſsûrées de la bonté des eaux

pour l'ufage de la vie. Ainſi on eſt revenu à des eſſais plus ſimples, comme ſi l'eau cuit bien les légumes, & ſi elle diſſout bien le ſavon. Quelques-uns l'eſſayent auſſi avec la teinture de roſe ou de tourneſol, dont elle change la couleur ſi elle a des parties acides. La meilleure preuve eſt l'habitude & la bonne ſanté de ceux qui ſe ſervent de l'eau, dont il eſt queſtion. Si on eſt obligé de la conduire, il faut éviter les tuyaux de bois & ſur-tout ceux de plomb. L'eau de pluye eſt la plus eſtimée de toutes; mais comme on n'en peut pas toujours avoir de fraiche, on eſt obligé de la ramaſſer dans des citernes. Et puiſque la neige fonduë donne une eau nuiſible, on doit avoir ſoin de l'en exclure. Quelques-uns rejettent auſſi celles qui viennent avec les orages & les tonneres, & tiennent que celles-là ſont les meilleurs qui tombent la nuit & avec un vent de Septentrion. Les citernes ſont des voûtes qu'on fait ſous terre, de pierres ou de cailloux avec du bon ciment, où on peut mêler auſſi de la limaille de fer; & afin que l'eau y entre bien purifiée on fait à côté des citerneaux, qui ont vers le fond une petite communication avec la citerne, & qu'on remplit en partie de gros gravier & le reſte de ſable. On fait enſorte que l'eau qu'on ramaſſe, tombe tout doucement dans ces citerneaux, où elle ſe filtre & purifie à travers ce ſable avant que d'entrer dans la citerne. Ce ſable en doit être ôté de tems en tems & changé, ou du moins lavé du limon, qui s'y aſſemble.

IV. La commodité des eſcaliers conſiſte à ce qu'ils ſoient bien éclairés, qu'on les découvre d'abord en entrant ſans beaucoup chercher ou ſe détourner; qu'ils ne ſoient pas trop roides. Pour ceci on donne 1. pi. à 14. po. à la largeur des marches ſur environ 6. po. de hauteur; leur

Digitized by Google

leur largeur doit être de 4. à 6. pi. & plus ſuivant la qualité du bâtiment. On y doit placer des paliers de repos entre les rampes, afin qu'on ne ſoit pas obligé de monter tout d'une traite. Quand on place les paliers de repos dans les angles, les rampes deviennent droites, & alors il faut éviter de donner du reſſaut à l'eſcalier. Ce qui ſe fait ſi on conçoit un eſcalier droit, qui eſt briſé à la hauteur du palier d'un point pris ſur l'extrémité de la tablette rampante, enſorte que ce qui ſuit dans cet eſcalier ſuppoſé droit, faſſe la ſeconde rampe. De cette maniere il eſt vrai que le filet extérieur de cette tablette rampante ne fera point de reſſaut. Mais cette diſpoſition occupant trop de place, on pourroit prendre ce point ſur le filet interieur de la tablette rampante, lequel par conſéquent s'y trouveroit briſé ſant reſſaut, & on y gagneroit la largeur d'une marche. Cependant il eſt à remarquer, que dans ce cas la jonction des deux tablettes rampantes ne ſçauroit faire qu'un mauvais effet. Ainſi on a penſé à un autre expedient, qui conſiſte à arrondir l'angle qui eſt au droit du palier. Voici comme on peut s'y prendre. Prenez de part & d'autre depuis l'angle du filet interieur la valeur de deux rampes & demie, l'interſection que vous ferez de ces deux points vous donnera le centre de votre arrondiſſement. Duquel ayant décrit un quart de cercle dans cet angle, vous le diviſerez en 8. parties, & les points 1. 3. 5. 7. ſont ceux où doivent aboutir les marches, dont les extrémités de celle d'enbas ſont concaves, & celles d'enhaut convexes. Ainſi le mauvais effet inévitable dans la conſtruction angulaire ſe perdra agréablement dans le contour arrondi de la tablette rampante. Si on veut faire des rampes tournantes, il faut du moins tacher d'éloigner le centre, enſorte que les girons des marches

Fig. 23. & 24.

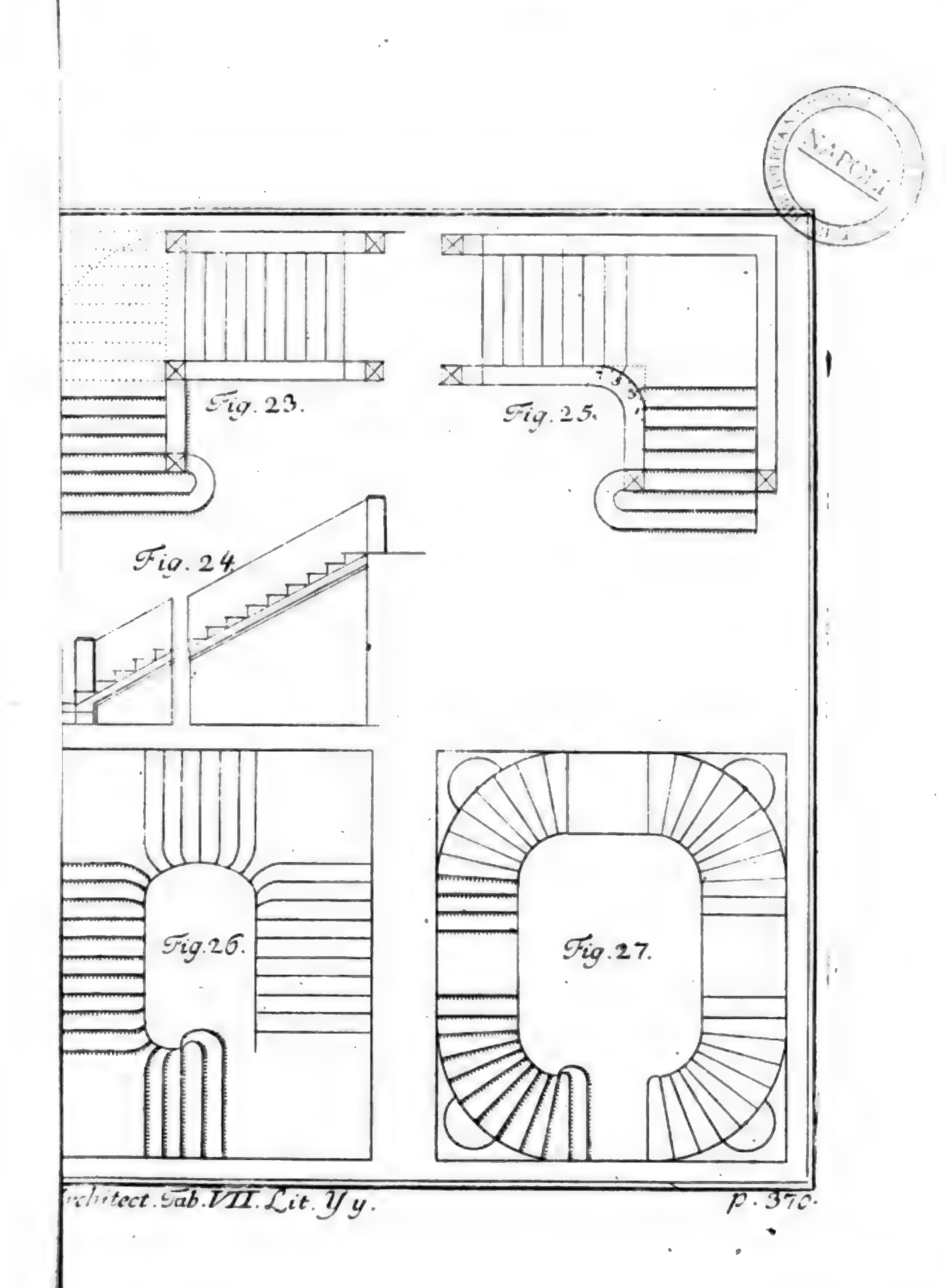
Fig. 25. & 26.

Fig. 27.

ne ſoient point trop larges du côté de la cage & trop étroits du côté de la tablette de la rampe ou du centre; inconvénient qui a banni l'uſage des eſcaliers à vis des maiſons qui ſont de quelque conſéquence; il eſt vrai que ces derniers peuvent ſervir pour des eſcaliers dérobés ou de dégagement, vû qu'ils occupent fort peu de place. Quant aux eſcaliers de dégagement, que l'on fait ordinairement de charpente, & où on peut mêler des marches droites & des tournantes, puiſqu'il faut qu'on s'accommode de la place des portes, des entreſoles, &c. on peut ne donner que 20p°. à 2. pi. à la longueur de leurs marches, & on obſerve ſeulement qu'ils ne ſoient point emmanchés dans des cloiſons ou murs au derriere des chambres à coucher à cauſe du grand bruit que cela cauſe En tout cas on y remédie en quelque façon par des dalles de pierre qu'on poſe ſur toutes les marches.

V. Quant aux parties ou pieces des appartemens, il eſt aiſé de voir, qu'elles ſe doivent régler ſelon les differentes conditions des perſonnes. Ainſi nous pouvons dire en géneral, que tout bâtiment ſervant à l'habitation eſt deſtiné à trois chefs principaux, qui ſont les fonctions de la vie, le ſervice & l'agrément. Les fonctions de la vie concernent la vacation de chacun & le repos; le repos demande une chambre à coucher; la vacation ſelon la differente condition des perſonnes, demande du moins un attelier ou une boutique, & chez quelques-uns un magaſin, chez d'autres au moins un cabinet. Ceux qui reçoivent plus de monde chez eux & qui ont plus de figure à faire ont beſoin d'une antichambre & de quelque garde-meuble. Ainſi un appartement logeable de gens de cette qualité doit contenir une antichambre, une chambre & un cabinet, on y joint une garde-robe, tant

Digitized by Google



rchitect. Tab. VII. Lit. Yy. p. 370.

NAPOLI

pour mettre à côté ce qui ne doit point se présenter à la vûë, que pour avoir quelque Domestique à portée. Enfin si un tel appartement est encore accompagné d'un côté d'une gallerie, qui peut servir pour y étaler les choses de prix ou de rareté, & pour des conferences ou petites promenades, &c. & d'un autre côté d'une sale, qui sert chez les plus accommodés pour les festins & les divertissemens, où il entre beaucoup de monde, avec quelque vestibule & premier antichambre, où les Domestiques attendent leurs Maîtres; un logement de cette espece peut convenir aux gens d'un état très-relevé. Ces pieces se trouvent revêtuës de marbre ou de pierre de taille pour la magnificence ou de plâtre pour la propreté ; & ils se trouvent par-là garantis du feu : Les revêtemens de menuserie tiennent chaud. Les antichambres, les chambres & même les cabinets occcupent ordinairement deux croisées. La cheminée se place sur le mur de refend au milieu du côté qui est entre le fond & les fenêtres, ensorte qu'on la découvre d'abord en entrant. Dans une grande chambre elle doit occuper le milieu du mur depuis le pied du lit jusqu'au derriere du mur de face. Dans le fond des cheminées on met des contrecœurs de fer fondu, tant pour la réflexion de la chaleur, que pour conserver le mur. On y peut même ménager un vuide par derriere, qui répand dans la chambre la chaleur qui passe à travers la plaque ou le contrecœur. Dans les grandes Sales & dans les galleries, on met deux cheminées à l'opposite l'une de l'autre. Les Sales occupent ordinairement trois croisées & plus : Il y en a qui prétendent que le nombre en soit impair. Les chambres à coucher, si elles ne sont pas en même tems chambres de parade, de même que les cabinets &

encore plus les garderobes se peuvent contenter d'une seule croisée. Le service demande d'abord qu'un tel appartement soit dégagé par quelque sortie, qui donne passage aux Domestiques, afin qu'ils n'interrompent pas mal à propos les visites & les assemblées. Outre cela la principale partie du service contient la cuisine, à laquelle est joint le commun, & dans les maisons où la table fait figure, elle est encore accompagnée du garde-manger, de la rotisserie, du lavoir, du four, d'un Office, &c. à quoi il faut ajoûter la cave & le bucher. Une autre partie du service, dont la fortune accommodée joint au besoin de se trouver souvent dehors ne se peut point passer, est l'écurie accompagnée des remises de carosse, &c. L'agrément joint à ceci la multiplication des appartemens pour changer selon les saisons ou pour quelque autre cause particuliere; un Jardin avec ses accompagnemens, dont le principal est l'orangerie; un appartement pour les bains, &c. C'est dans l'arrangement de ceci en tout ou en partie suivant l'état du Maître, la dépense qu'il veut faire & la place, qui est d'une grande sujetion dans les villes, que paroît le génie de l'Architecte, en formant un composé que la symmetrie du tout, l'harmonie qui est entre le tout & ses parties, l'ordre, la commodité & la beauté rendent également gracieux & de bon goût.

VI. La disposition génerale que l'on a reçû en France pour ces sortes de bâtimens ou hôtels, consiste à faire ensorte qu'en entrant on se trouve d'abord dans la cour, au fond de laquelle se présente aussitôt le grand corps de logis, accompagné de ses aîles des deux côtés de la cour; le jardin se trouve tout le derriere, sur lequel répondent les principaux appartemens, pour joüir en même tems de l'agrément de la vûë & de la tranquillité,

Digitized by Google

Les offices étoient autrefois dans des souterrains au dessous du corps de logis; mais l'odeur & la fumée quelquefois inévitables, font qu'on les loge aujourd'hui dans l'une des aîles, l'autre se destinant à l'écurie & ce qui en dépend. La principale entrée du corps de logis est ordinairement dans le milieu & donne dans un vestibule, à côté duquel est d'abord le grand escalier; du fond de ce vestibule on entre dans une sale ou salon, qui donne sur le jardin, d'où on passe à droite & à gauche dans les appartemens, dont les portes toutes placées auprès des croisées font une enfilade très-agréable à la vûë. La sale à manger, qui peut en même tems servir d'antichambre à l'un des appartemens ne doit être ni trop éloignée ni trop près des offices. Les cabinets & sur-tout les chambres à coucher doivent avoir leurs dégagemens dans des garde-robes, qui ont sortie sous le grand escalier, ou dans les bassecours qui sont à côté. Cet étage de rez de chaussée a environ 15. pieds de hauteur. Audessus est le bel étage, qui a le grand pallier au dessus du vestibule; les appartemens sont à-peu-près de même qu'en bas; si ce n'est que l'une ou l'autre des deux aîles peut fournir une belle gallerie accompagnée d'un ou de deux salons. Ces appartemens peuvent avoir environ 20. pi. de hauteur; & puisqu'audessus de cet étage il y en a un second, mais qui n'a qu'environ 9. pi. de hauteur, on peut encore ajoûter ceci à l'exhaussement de la grande sale pour lui donner plus d'air & de beauté. Les garde-robes & les petites pieces, entre lesquelles on pratique les escaliers dérobés, de même que les remises de carosse & les offices qui sont dans les aîles, se trouvent souvent surmontées d'entresoles pour y loger les Domestiques. Les caves & les buchers restent sous le grand

corps de logis avec cette seule attention, que les ouvertures des caves soient tournées vers le Nord ou vers l'Est, & que leur grandeur & profondeur se régle sur la grandeur des tonneaux, & la quantité des provisions qui conviennent à la maison; les buchers pouvant être tournés vers l'air chaud, qui sert encore à sécher les bois. Lorsqu'on a assez de place on se met en quelque façon dans le goût Italien en se contentant d'un seul rez de chaussée. On ménage par-là toute la place & la dépense d'un grand escalier. Ainsi l'entrée consiste en un vestibule suivi d'un salon à l'Italienne, ces deux pieces se trouvent accompagnées de côté & d'autre d'un appartement, qui contient son antichambre, chambre & cabinet; le salon & les cabinets aboutissent à une gallerie, qui donne sur le jardin. De chaque antichambre on peut encore entrer dans des aîles, qui contiennent chacune son appartement, qui se dégage dans les cours des offices & des écuries, qui accompagnent la cour d'entrée des deux côtés.

VII. Il y a encore deux grands inconvéniens fort contraires à la commodité des maisons, qui sont la fumée des cheminées & la mauvaise odeur des aisances. Quant à l'incommodité de la fumée, il se trouve qu'elle naît de differentes causes, telles que sont le Soleil, qui donne dans le haut de la cheminée, le vent, & le plus souvent la mauvaise construction de la cheminée même. Les rayons du Soleil qui donnent fort à plomb & échauffent le haut de la cheminée, ne peuvent causer cet inconvenient qu'aux cheminées de cuisine; ainsi toutes ces constructions artificieuses de manteaux qu'on met au haut des cheminées sont inutiles dans des belles maisons bâties à la moderne, puisqu'on ne fait point de feu dans les cheminées

Digitized by Google

d'appartemens en Esté. Lorsque c'est le vent qui cause cet inconvenient, on prétend le détourner par un quart de sphere concave de tole ou de fer blanc mobile sur un pivot & surmonté d'une giroüette fixe, qui fait que ce quart de sphere met toujours l'issuë de la cheminée à couvert du vent. Quelques-uns se servent au lieu du quart de sphere d'une tole plane posée obliquement; mais la suye & la roüille sont capables d'empêcher bientôt le jeux de la machine. Quelques-uns cherchent une autre chicane en perçant le tuyeau de la cheminée de petits troux ou soupiraux, qui y entrent en montant, & par lesquels ils prétendent que l'air doit entrer & ressortir par en haut avec la fumée. D'autres, qui ont remarqué que les tuyaux droits sont le plus sujets à cet inconvenient, les devoyent exprès, & ils s'en trouvent beaucoup soulagés. Fig. 28. Aujourd'hui on s'avise d'arrondir les angles du chambranle de la cheminée, ce qui aide aussi un peu; comme aussi quand on donne peu de hauteur à l'ouverture, qui est dans la chambre; mais cela diminuë l'effet du feu que l'on fait pour se chauffer. Quelquefois la piece où est la cheminée est trop petite pour fournir assez d'air qui puisse faire sortir la fumée. On propose de lever cet inconvenient par des Eolipiles, que le feu même fait souffler beaucoup d'air dans la cheminée; mais on peut dire contre cette théorie, qu'elle n'a pas été mise en pratique ou du moins en vogue depuis le tems qu'on l'a proposé. D'autres proposent de faire entrer de l'air du dehors par des tuyaux qui ayent leur ouverture vers le haut du chambranle. Dans les pays froids on fait de cette façon entrer de l'air, mais qui sort dans le milieu de l'atre ou du foyer; ce qui fait en effet qu'il ne s'attire que peu ou point d'air de la chambre, laquelle par con-

sequent demeure plus chaude. D'autres suspendent dans le tuyau de la cheminée à une corde assez longue quelque corps qui puisse tourner librement & faire la fonction d'un moulinet, de sorte que la chaleur faisant toujours tortiller la corde, ce corps tournant envelope la fumée & la fait monter sans qu'elle puisse redescendre, &c. En tout ceci je crois que la seule consideration du mouvement de la fumée peut donner une régle. Ce mouvement se fait par des especes d'ondes ou boüillons, qui vont en spirale, ensorte que la fumée cherche toujours
Fig. 29. plus de place à mesure qu'elle s'éleve; ainsi faisant ensorte que le tuyau de la cheminée s'étressisse doucement jusqu'à environ 4. pi. du haut du chambranle & que depuis cette gorge il aille s'élargissant de plus en plus jusqu'à son issue, desorte que la fumée trouve toujours plus de liberté, il est évident qu'elle dégagera par son action même la chambre d'où elle est sortie; à quoi l'air qui entre du côté de l'atre, & qui sert à souffler le feu, & à en chasser les parties de suye aidera considerablement. L'idée des cheminées devoyées qui dans leur devoyement gagnent ordinairement plus d'ouverture, & aident ce mouvement spiral des ondes, se trouve de concert avec cette idée.

VIII. On remédie à la seconde incommodité en cachant ces sortes d'endroits avec le plus de soin qu'il est possible. Pour cet effet l'on ménage quelque petit passage détourné, à qui on puisse donner de l'air, & on le détache même des garde-robes par deux portes, sans compter la fermeture de la lunette, que l'on a encore soin de faire double, sans parler d'autres soins très-recherchés, comme sont les robinets, qui donnent de l'eau en dedans, &c. La chausse doit être un tuyau de plomb ou de

ou de pierre percée en rond ou quarrement, & le plus ſouvent compoſée de boiſſeaux de potterie. Il faut la faire aſſez large, afin que rien ne s'attache. Enfin la foſſe doit être très-profonde, bâtie de gros murs & de bonne matiere avec contre-murs bien épais, & éloignée des puits, caves, citernes & autres lieux qui peuvent ſouffrir de la mauvaiſe odeur. Outre cela on y fait encore une ventouſe de plomb ou de potterie qui communique à la chauſſe, & ſort au deſſus du comble pour diminuer la puanteur.

CHAPITRE SIXIE'ME.

De la Beauté des Bâtimens.

I. LA beauté des Bâtimens conſiſte dans l'application judicieuſe des ornemens des cinq Ordres de colonnes; dans la richeſſe des matieres; dans les ornemens que donnent la peinture & la ſculture; & enfin dans la décoration des jardins.

II. La plus ancienne maniere de bâtir étoit ſans doute la charpenterie, dont la diſpoſition génerale a donné la premiere idée aux Ordres d'Architecture. Ainſi les poteaux ſoit corniers, c'eſt-à-dire, angulaires, ou de fond, c'eſt-à-dire, le long du bâtiment, ſe poſent ſur quelque pierre pour les garantir de la pourriture, le haut de ces poteaux ſe retenant par un linteau, ſur lequel ſe mettent les ſolives, & au deſſus de celles-là quelque ſabliere ou tirant, qui ſoutient la ferme ou le comble. Cette ſimplicité s'eſt changée enſorte, que la pierre fondamentale eſt devenuë le piedeſtal; les poteaux des colonnes; le lin- Fig. 30.

Ddd

teau une architrave ; les têtes des solives & leurs entrevoux ont fait la frise ; la sabliere posée dessus avec une saillie pour faire avancer le toit & jetter les eaux de pluye un peu loin du bâtiment, est devenuë corniche ; & le profil du comble s'est changé en fronton. Dans les bâtimens de pierre pour décorer des pans de muraille, sans cela tout unis, on imita ces parties, & on eut soin de les orner de differentes moulures. Enfin l'attention & le goût y fit entrer les proportions, & établit successivement ce que l'on appelle les Ordres d'Architecture. Voyez les moulures & les ornemens qu'elles admettent, de même que la configuration de l'Oeuf & de sa niche dans les figures des deux planches, qui ne sont pas cottées dans la suite des figures précedentes. Leurs noms sont les suivans tant en termes des Ouvriers qu'en termes des Auteurs.

1. *Filet, listel, listeau,*	ou	*Réglet, bandelette.*
2. *Baquette,*	ou	*Astragale.*
3. *Boudin rond, bazel,*	ou	*Petit Tore, Tore supérieur.*
4. *Gros baston, boudin,*	ou	*Gros Tore.*
5. *Scotie, Rond creux,*	ou	*Nasselle, Trochile.*
6. *Quart de rond, renversé & droit,*	ou	*Echine, Astragale, Lesbien*
7. *Demi creux, Cavet, Gorge,*	ou	*Escape, Cimaise Dorique.*
8. *Talon renversé & droit,*	ou	*Cimaise Lesbienne.*
9. *Doucine ou geule renversée & droite,*	ou	*Geule Gorge, & Cimaise.*
10. *Gouttiere, mouchette,*	ou	*Couronne, Larmier.*
11. *Plafond,*	ou	*Sofite.*
12. *Moulure ovale en demi-cœur,*	ou	*Tore corrompu.*

III. La solidité & la délicatesse de ces Ordres, consiste dans le plus ou moins de raison de l'épaisseur de la co-

Digitized by Google

lonne à sa hauteur; & la délicatesse se trouve aidée par l'augmentation des moulures, & quelques autres ornemens qu'on y a ajoûtés. Les Grecs se sont contentés de trois ordres successivement inventés, qu'ils ont employés suivant que les édifices devoient avoir plus, ou de l'air de solidité, ou de celui de beauté. L'Italie y en a joint deux autres, dont l'un est inférieur en ornemens aux Grecs, l'autre conteste avec ce que les Grecs ont donné de plus orné. Ainsi nous avons en tout cinq Ordres, qui sont le Toscan, le Dorique, l'Ionique, le Corinthien, & le Composite ou Romain. Chaque Ordre entier contient 3. parties principales, qui sont le Piedestal, la Colonne & l'Entablement. Chaque partie est encore composée de 3. autres. Ainsi le Piedestal contient une base, un dé ou tronc & une corniche. La colonne contient sa base, le fust & le chapiteau. L'Entablement contient l'Architrave, la Frise & la Corniche. Ces parties à l'exception du dé, du fust, & en quelque façon de la frise, se trouvent composées de plus ou de moins de moulures, suivant que les Ordres sont plus riches ou plus ornés les uns que les autres. Pour déterminer les hauteurs & les saillies de toutes ces parties, on se sert d'une mesure tirée de l'Ordre même, que l'on appelle Module, & qui est le demi-diametre du fust de la colonne par en bas, puisqu'elles ont coutume d'aller en diminuant depuis le tiers de leur hauteur Ce module, qui est à proprement parler l'échelle de la construction de tout l'Ordre, se divise differemment suivant les differens Ordres & les differens Auteurs, qui ne different pas seulement pour les mesures, mais encore pour les moulures mêmes, & dont il y en a qui à force d'y en mettre rendent leurs Ordres mesquins. Nous suivrons les dimensions de Vignole, que l'on a

trouvé s'accorder le plus avec les Antiques, & qui est le plus suivi par les Ouvriers. Du reste les colonnes se posent ou en pilastres ou en colonnes, & cela ou isolées, ou ensorte qu'elles soient appuyées, ou posées contre des piedroits ou jambages, qui aboutissent à un entablement nommé Imposte, qui se trouve surmonté d'un arc, lequel se forme ordinairement par une Archivolte, dont le milieu est quelquefois interrompu d'une clef de voute. Lorsque les colonnes se posent isolées ou seules, Vitruve, qui n'a rien sçû de l'accouplement des colonnes pratiqué par les Modernes, donne pour les intervalles ou distances des colonnes les cinq manieres suivantes, que nous compterons d'un axe de colonne à l'autre, & qui sont :

l'Eustile, ou à colonnes bien espacées	6. mod. & $\frac{1}{2}$,
le Systyle, ou à colonnes posées de près	6. mod.
le Picnostyle, ou à colonnes serrées	5. mod.
le Diastyle, ou à colonnes éloignées	8. mod.
l'Areostyle, ou à colonnes rares	10. mod.

Cependant ces intervalles ne s'observent point précisement. Pour faire la construction de ces ordres, Vignole établit pour régle generale que l'Entablement est le quart de la colonne prise avec sa base & son chapiteau ; & le Piedestal le tiers. Voici une table qui marque pour chaque Ordre dans ses deux colonnes la hauteur & la saillie, depuis l'axe de la colonne, de chaque partie & moulure en modules & ses parties. Où il est seulement à remarquer que dans le Toscan & le Dorique le Module est divisé en 12. parties, & dans les autres en 18. Toutes les Colonnes se diminuent depuis un tiers de leur hauteur jusqu'au haut du fust; cette diminution est ordinairement d'un sixiéme de son épaisseur, à moins que les colonnes ne soient fort grandes, ou placées dans des lieux fort

Table.

Digitized by Google

élevés ; & elle se fait selon la Conchoïde. Mais comme il est difficile d'operer en grand par le moyen de cette Courbe, dont le pole devient fort éloigné, on pourra prolonger le côté extérieur du tiers d'en bas de D vers H, *Fig.* 31. ensuite portant du point F, qui détermine la diminution du fust en haut, le module FG, qui coupe l'axe AB en G, & le prolongeant de l'autre côté en H, si l'on divise l'une & l'autre des deux lignes GE, HD en un même nombre de parties égales, qu'on joint par des droites que l'on détermine de la longueur du module depuis l'axe, on trouvera autant de points de la courbure que l'on joindra par le moyen d'une régle ployante ; ce qui donnera la cherche de la diminution de la Colonne. On fait souvent les colonnes, à l'exception des Toscanes, canelées. Les canelures sont dans le Dorique au nombre de 20. & à vives-arrêtes; leur coupe est $\frac{6}{1}$ ou $\frac{1}{4}$ de cercle. Si on taille les oves dans le quart de rond du chapiteau, il faut que chacun réponde à une canelure. Dans les autres ordres les canelures sont au nombre de 24. jusqu'à 30. leur coupe est un demi-cercle, dont le centre est à la circonference du fust, & elles sont distinguées par des côtes, qui sont autant de listels qui restent du vif de la colonne, & qui sont $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3}$ du creux. On remplit quelquefois ces canelures jusqu'au tiers de leur hauteur de rudentures, roseaux ou grosses baquettes arrondies par les deux bouts, &c. Dans le Dorique les Métopes ne peuvent être absolument que quarrées, & les triglyphes les $\frac{2}{3}$ de la largeur des métopes. Outre cela il faut que sur chaque colonne il se rencontre précisément un triglyphe, & c'est ce qui fait la grande sujettion dans cet ordre. On observe de même dans les autres Ordres, qui ont des modillons ou des Denticules, qu'il s'y en rencontre un

ſur le milieu de chaque colonne. Si on taille les Oves, on a ſoin de faire enſorte qu'il s'en rencontre un ſur chaque denticule, ou ſous chaque intervalle. Entre pluſieurs manieres de tracer la Volute Ionique, celle de Goldmann paroît être la plus Geometrique; mais le liſtel qui devroit être par-tout naturellement la quatriéme partie de la Volute, y diminuë trop, & par conſéquent le creux devient trop large. Ainſi il vaut mieux s'en tenir à la
Fig. 32. méthode que Philibert de l'Orme a donnée ſelon l'Antique;
& 33. & pour trouver le contour intérieur, il ne faut que retirer les centres d'$\frac{1}{12}$ du rayon de l'Oëil de la Volute. Au lieu du Chapiteau Ionique, qui a le tailloir quarré & les 2. faces differentes, on ſe ſert aujourd'hui le plus ſouvent du Chapiteau angulaire, tel qu'il eſt employé dans l'ordre Romain; quelques-uns y joignent même un rang de feüilles. Quant aux feüilles du Chapiteau Corinthien, elles ſont reſſenduës en cinq comme les doigts de la main; celles qui ne le ſont qu'en trois ſont de laurier, dont le revers eſt courbé & reſſendu en 5. & celles d'Olivier en 11. Quant à leur choix, celles d'Olivier ne ſemblent pas ſi confuſes que celles d'Acanthe. Du reſte l'Ordre Romain convient pour les proportions, &c. avec le Corinthien; dès ſon invention il fut deſtiné aux Arcs de Triomphe, & ainſi pour être un Ordre Heroïque; mais enſuite on ne laiſſa pas que de le mêler avec le Corinthien ſur la même ligne. L'Ordre Toſcan paroît de même n'avoir été deſtiné qu'à des Colonnes uniques & coloſſales, ſans entrer dans la conſtruction ordinaire des Edifices. D'où eſt venu la regle établie par pluſieurs Architectes; qui veut qu'on ne mêle jamais les Ordres Grecs avec les Latins dans le même Edifice; mais d'autres la négligent, & ne ſe font aucun ſcrupule de poſer un Ordre Romain au deſſus

Digitized by Google

d'un Corinthien. Tous les autres que les anciens Architectes semblent avoir voulu distinguer par les differentes figures, qui entrent dans la composition de leurs Chapiteaux, ne laissent pas de se rencontrer dans les proportions du Corinthien. C'est ce qui fait que tous les efforts qu'on s'est donné pour trouver un 6.me Ordre n'ont point eu le succés & l'approbation des connoisseurs. Les Frises sont souvent ornées de sculture ou bas reliefs, qui ont rapport à la destination de l'Edifice. Les moulures ont aussi leurs ornemens, mais plus en dedans qu'au dehors du bâtiment; on y distingue beaucoup le bon goût de l'Architecte. Les colonnes se font ou isolées ou engagées d'un tiers ou d'un quart dans le corps du mur. Lorsque l'on employe des Pilastres, leurs pans de même *Fig. 34.* que leurs bases, plinthes & chapiteaux suivent les plans, soit rectilignes ou circulaires, où ils se trouvent appliqués, au contraire des plinthes & chapiteaux des Colonnes, qui sont droits, quoique le plan soit circulaire. Les pilastres canelés le sont ordinairement de 7. canelures; il est rare d'y en voir 9. & les côtes ou filets des extremités gardent toute leur largeur d'un côté & d'autre de l'angle, & on le renforce en remplissant les canelures des rudentures plates, ou ce qui est encore mieux pour faire resistance, en formant sur l'angle un Astragale. La saillie ordinaire des pilastres est d'un sixiéme de leur diametre, on les fait ordinairement sans diminution. Ainsi quand ils accompagnent des colonnes, quelques-uns les ont fait plus etroits que la colonne, & donné plus de saillie à leur base, d'autres les ont diminué comme la colonne. Dans le Toscan & dans le Dorique on souffre que le plinthe, la base & le tailloir de la colonne qui est accouplée au Pilastre se confondent; mais dans l'Ionique & le Corinthien il faut prévenir cette

Fig. 36. confuſion. Lorſqu'à un retour angulaire on ne mèt qu'un pilaſtre à l'angle, le ſoutien paroît foible, & on ne ſçauroit mettre d'Ordre au deſſus ; ſi le pilaſtre eſt retiré de l'extremité de l'angle, l'entablement ſemble porter à faux, &
Fig. 37. l'encoigneure n'eſt pas riche. Ainſi d'autres ont formé deux pilaſtres qui font un retour chacun de ſa moitié ſur l'angle ; mais l'un paroiſſant ainſi ſortir de moitié derriere l'autre, ceci a la mine d'être défectueux. Ainſi d'autres
Fig. 38. ont mieux aimé couper en pans l'angle de l'édifice entre
Fig. 39. les deux pilaſtres, qui en ſont les plus proches. Ou bien on garnit l'angle d'une chaine de pierres. Dans les angles rentrans quelques-uns plient le pilaſtre en deux, & comme alors il paroît trop maigre, ils font chaque face de $\frac{2}{3}$ de toute la largeur, mais de cette maniere il naît de la difformité dans les feüilles du chapiteau Corinthien. Ceux qui mettent dans ces Angles deux pilaſtres qui ſe touchent, ne peuvent point éviter la confuſion dans les volutes & les autres parties ſaillantes ; laquelle eſt encore plus grande lorſque l'un de ces pilaſtres couvre une partie de l'autre;ainſi tout conſideré on peut mettre deux pilaſtres à une petite diſtance de l'angle ; car l'entablement qui va de part & d'autre juſques dans l'angle eſt aſſez ſoutenu par le corps de la muraille ſans avoir la mine de porter à faux. La levre du vaſe du chapiteau Corinthien d'un pilaſtre peut être droite, ou ſi on la veut arrondir, il ne faut ſe ſervir que du centre de la courbure oppoſée du tailloir.

IV. On employe les Ordres d'Architecture differemment dans l'Ordonnace des bâtimens. Ainſi quant à l'extérieur des faces, les moindres maiſons ſe contentent d'un entablement ou corniche, que Vignole fait trop haute en lui donnant un onziéme du bâtiment ; les croiſées & les portes ont quelquefois des chambranles & ornemens, qui tirent leur

Digitized by Google

composition du goust de quelque Ordre. D'autres qui sont plus considerables, ont les pans de mur ornés de chaines de pierres & de ravalements; elles admettent des balcons, des avant-corps & même des pilastres. Les plus magnifiques demandent une Architecture encore plus riche, qui va jusqu'à des colonnes isolées, accompagnées de statuës, de sculpture, &c. où il ne faut avoir que le soin d'éviter la confusion. Dans ces sortes de bâtimens on met quelquefois les Ordres les uns sur les autres; où il faut soigneusement observer que le diametre entier des colonnes de dessus ne doit être au plus qu'égal au diametre diminué des colonnes d'enbas. Les axes des colonnes doivent se répondre; ainsi celles d'enbas se trouvant engagées jusqu'à un tiers, celles d'enhaut deviennent isolées. Il y a encore d'autres sujettions, qui rendent cette composition difficile, & même le bâtiment n'a pas toute sa grace, à moins qu'il ne soit regardé d'assez près. Ainsi d'autres ont renfermé toute l'ordonnance en un seul ordre d'Architecture. Mais en ce cas l'entablement, qui ne sçauroit être coupé ni percé de fenêtres, cause des difficultés par rapport au dedans. Ainsi on est venu à faire tout le rez-de-chaussée en forme de soubassement rustique, ou orné simplement de bossage; L'on y forme quelquefois des Arcades, dans lesquelles se trouvent les croisées, dont la fermeture est cintrée du centre de l'Arc; Au dessus est posé un ordre le plus souvent Ionique d'un ou deux étages, surmonté encore d'un Attique, ou ordre imparfait pour les mezanines. Mais la corniche de l'Attique dévant avoir bien moins de hauteur & de saillie, que celles de l'Ordre principal, ceci est encore capable de faire un effet qui choque. On évite ces difficultés ou en omettant l'Attique, ou en ne mettant qu'un premier étage sur le rez-de-chaussée, auquel cas on

pourra plus facilement accorder deux Ordres posés l'un sur l'autre, & qui pourront être differens, afin que la répetition ne fatigue point la vûë. Les chambranles des portes & des croisées ont des moulures semblables aux Architraves; leur largeur est $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{3}$ de l'ouverture, ou encore moins si la baye est fort grande; ceux des portes terminent à un socle; & ceux des fenêtres, s'ils ne font pas le tour, terminent à l'appui ou à la tablette ou banquette, laquelle se trouve soutenuë de quelque console, &c. Si on y met un entablement avec un fronton, comme il convient à celles qui sont dehors, on accompagne ordinairement le chambranle de deux montans, qui terminent chacun à une console qui porte la corniche. La frise est entre la corniche & le chambranle. Le fronton soit rond ou angulaire ne doit point être ouvert ou brisé dans son milieu; inconvenient qui ne permet pas qu'il puisse être pris pour un toit. Du reste dans le fronton circulaire le reglet AB.
Fig. 40. sous la cimaise est à sa perpendiculaire au centre CD. comme
41. 42. 9 : 4 ou 9 : 5. ou 3 : 1. dans le triangulaire, GH est au
reglet EF. comme 5 : 24. ou 1 : 4. ou comme $\sqrt{2\,EG^2} - EG$:
Fig. 43. 2 EG. c'est à dire comme $\sqrt{2} - 1 : 2$. Le rez-de-chaussée
44. 45. étant ordinairement trop bas pour donner aux portes cocheres une hauteur double de ce qu'il leur faut d'ouverture, on s'est avisé de les faire bombées au lieu du plein ceintre. On donne la même figure aux fenêtres dont l'ouverture est fort grande, ou à des magazins & à des rez-de-chaussée pour le contraste; mais cette figure ne fait pas bien quand on la donne par-tout, lors même que la baye est fort mediocre ou petite. Il y en a qui font des orillons ou croisettes aux angles des chambranles, en leur faisant faire un ou deux retours en dehors; mais il en naît le plus souvent un assez mauvais effet. Les mascarons

Digitized by Google

dans les tympans, de même que les cartouches, à moins qu'ils ne servent à placer les armes sur quelque porte, comme aussi les pyramides & les boules, sont tous des ornemens qu'il est le plus sûr d'éviter. Quant aux figures qui accompagnent les ornemens d'Architecture on a remarqué, que la colonne étant de 18 pieds, la figure ou statuë qui l'accompagne doit avoir 6 pi. de hauteur, & elle augmente ou diminuë d'un pied à raison que la colonne augmente ou diminuë d'une toise; celles que l'on met sur les colonnes doivent être un peu plus grandes que celles qui sont au devant ou à côté; & celles qui sont posées contre les bâtimens ou dans des niches doivent être moins grosses & moins garnies de draperie, que celles qui sont isolées, ou qui n'ont point d'autre fond que le Ciel.

V. Le dedans des bâtimens ne reçoit la décoration des Ordres entiers d'Architecture que dans les Loges, les Vestibules, les Sales & les Galeries. Les autres pieces, telles que sont les Chambres & les Cabinets se contentent de leurs Corniches, la Tapisserie, & les panneaux de menuserie & de glace suppleant au reste. Les niches qui servent à recevoir des statuës, & qui se mêlent dans la décoration de l'Architecture se trouvent employées tant au dehors qu'au dedans du bâtiment; elles sont ordinairement hautes de $2\frac{1}{2}$ fois leur largeur, & terminent par une archivolte sur une imposte qui regne au dedans & qui termine aux pilastres voisins. La figure qu'on y pose doit être montée sur un socle qui est $\frac{1}{12}$ de la hauteur de la figure, dont les yeux ou selon d'autres le menton doit être à la hauteur de l'imposte. Si la niche n'a pas toute sa hauteur, la figure peut être d'autant plus garnie de draperie. Ceux qui mettent leur figure sur un grand piedestal, la font paroître postiche & défectueuse par rapport à cet escabeau, à moins qu'il n'y ait une raison

manifeste, qui fasse d'abord connoître le contraire. Quant aux corniches des appartemens on y cherche aujourd'hui la légereté, & on tâche de les faire en voussure; pour ôter tant qu'il est possible tout ce qui avance & qui peut paroître pesant. La décoration des cheminées consistoit ci-devant en un chambranle, dont la principale moulure étoit un gros tore accompagné de quelque scotie, astragale & réglet. Ce chambranle tournoit simplement à angles droits; au dessus il y avoit un attique ou addoucissement surmonté d'une corniche; le reste du tuyau montoit perpendiculairement jusqu'au haut, orné de quelque tableau ou bas relief, & la corniche de la piece tournoit à l'entour, si le tuyau n'étoit point pris dans l'épaisseur du mur. Aujourd'hui on y fait beaucoup de varieté. Ainsi on cintre les chambranles quelquefois sur leurs plans en tour ronde & en tour creuse. On y introduit des Pans coupés, des Pilastres, des Guaines, des Consoles, des Termes & d'autres ornemens Le mélange des marbres de couleurs differentes, dont le contraste néanmoins ne doit jamais aller du blanc au noir, ce qui seroit une décoration de sepulture, & les ornemens de bronze doré qu'on y applique, détachent ces differentes parties, & y produisent beaucoup de richesse. Les tablettes qu'on pose sur ces chambranles ont quelquefois assez de largeur pour y placer une pendule, &c. Au dessus on met des grands panneaux de glace accompagnés de chandeliers ou girandoles, & surmontés quelquefois d'ornemens de peinture & de sculture; cette même sorte d'ornemens se met aussi au dessus des portes. La menuserie, dont les placards se font de même avec beaucoup de varieté, se trouve mêlée de panneaux de glace & de sculture fine & légere; on ne s'arrête plus à la beauté des bois de lambris, depuis qu'on a remarqué que le blanc avec de la dorure appliquée à propos sur les ornemens

Digitized by

en cachant les défectuosités des bois, rend les appartemens gais, & d'une propreté de bon goût, de sorte que les bois de prix & le verni ne servent presque plus que pour les lambris des Eglises ou des Monasteres. Les buffets, dont on orne les sales à manger, admettent le marbre, le bronze, la dorure, la sculture & la peinture, conformément à la richesse de l'invention, qui est fort differente. Au lieu des sofites, qui sont des especes de corniches volantes & entrelassées, qui laissent des creux remplis d'ornemens, on se sert de plafonds, qui sont le plus souvent surbaissés ou cintrés vers leurs extrémités. La légereté qu'on cherche ne permet point de les charger de figures de relief; ainsi on se contente de les orner de peinture ou sur le plâtre ou sur le bois; quelquefois on les fait marouflés, c'est-à-dire, on fait la peinture sur une toile tenduë sur un ou sur plusieurs chassis, & on la retient avec des cloux; quelquefois on se contente de les laisser seulement blancs & unis. Les couvertures se font de tuiles, d'ardoise, de plomb ou de cuivre. On tâche de les cacher aux édifices considerables, où la derniere corniche est surmontée d'une balustrade posée sur un socle. Si les combles paroissent, les enfaistemens & bourseaux, qui sont quelquefois de plomb & même doré, de même que les lucarnes & les yeux de bœuf leur servent d'ornemens.

VI. Les Jardins sont differens, tant par rapport à leur grandeur, que par rapport à la situation de leur terrein. Dans les villes la place est ordinairement assez petite & bornée, & c'est ce qui fait que la décoration de ces sortes d'endroits ne peut être qu'assez simple. A la campagne on a plus d'étenduë, & le terrein y est ou uni ou de differentes pentes. Il faut former là-dessus son dessein en ne remuant que le moins de terre que l'on pourra pour ménager la dépense. La premiere regle est que le bâtiment soit toujours élevé au dessus de

tout ce qui en eſt proche, puiſqu'il convient de deſcendre dans le jardin tant de front que par les côtés. Le parterre eſt la premiere piece qui ſe préſente en entrant, qui doit être de la largeur du corps du bâtiment, les ornemens de broderie doivent être ſans confuſion, & la platebande, dont il eſt entouré, y doit être proportionnée. Il y a de quatre ſortes de parterres. Le premier eſt fait de broderie, entouré d'une platebande découpée & d'un chemin ſablé, qui ſépare le champ de la broderie d'avec la platebande; il doit toujours être mis deſſous les fenêtres de la maiſon comme le plus noble. Le ſecond eſt composé d'un maſſif de buis, au milieu duquel tourne en ligne parallele un cordon de gazon d'un tiers de ſa largeur; & les grandes places qui reſtent, ce maſſif placé, ſont remplies de broderie. Le troiſiéme eſt de pieces coupées en compartimens pour mettre des fleurs; il eſt composé d'enroulemens de lignes droites & courbes, avec des ſentiers en lignes paralleles aux pieces; il eſt entouré d'une platebande coupée en divers endroits, garnie d'arbriſſeaux & de fleurs; les chemins & ſentiers doivent être ſablés & les pieces remplies de bonne terre noire. Le quatriéme eſt en compartimens de gazon; les pieces en doivent être grandes & larges; il eſt entouré d'une platebande pour mettre des fleurs; les grands parterres de cette façon ſont appellés à l'Angloiſe. Les allées entre les parterres ou à l'entour doivent être un peu plus élevées au milieu, ſablées & de niveau ou du moins peu roides; ſi on y fait une aire de recoupes de pierres bien battuës, il leur faut moins de ſable, & il y croit d'autant moins d'herbes. Quand les parterres ſont conſiderables les allées ont 12. ou 15. pi. & encore plus de largeur. Aux grandes maiſons de campagne où on a aſſez de terrein les allées principales doivent être percées avantageuſement en ménageant les plus belles vûës qu'on

Digitized by Google

peut remarquer du bâtiment, ce qui donne les iſſuës agréables; d'un autre côté il faut régler les pentes & les perrons, enſorte que du bout de l'allée principale on découvre la maſſe de tout l'édifice. Les allées ont des contre-allées de la moitié de leur largeur, excepté aux allées de charmille dont les contre-allées ſont fort étroites pour y trouver l'ombre & le frais. Les grandes allées ſont plantées de maroniers d'Inde & d'Ifs entre deux. Les avenuës ſont d'Orme & il y a auſſi des contre-allées. La plus grande beauté de ces avenuës eſt, que les branches des arbres des principales allées ſe touchent par leurs extrémités & que les contre-allées ſoient en berceau. Lorſque le terrein eſt inégal, on retient les terres par des glacis & par des terraſſes de maçonnerie, où on fait des perrons. Les glacis ſont couverts de gazon pour entretenir les terres; leur pente doit être au deſſous de la diagonale du quarré; les murs des terraſſes doivent être garnis d'arbres verds en palliſades ou de charmille. Les plus beaux perrons ſont quarrés, leurs degrés peuvent avoir 15. à 16. po. de giron ſur 6. po. de hauteur avec 3. lignes de pente pour l'écoulement des eaux. Les paliers de ces perrons doivent être de 2. pas de large. La vûë de ces jardins à chutes eſt très riche. Nous ne parlons point des boſquets & des allées & cours, qui s'y font en patte d'oye, quinconges, étoiles, &c. Les berceaux & cabinets de treillage que l'on garnit de chevre-feüille, de vigne vierge ou de jaſmin commun ſont encore un bel ornement & de grande commodité dans les jardins. Les Orangeries doivent avoir leurs fenêtres tournées vers le midy. Si on fait des parterres exprès d'orangerie, il faut qu'ils ſoient ſimples à compartiment de gazon, parce que les orangers qui en font la plus grande beauté forment les allées. Les ouvrages de ſculture contribuent encore à la richeſſe des jardins; les figures & les

groupes ſe mettent dans des niches de treillage ou contre une palliſade de verdure ; les vaſes & les obeliſques doivent être iſolés & ils ſe mettent au bout des rampes, aux coins des perrons, aux encoignures des parterres de broderie, & au milieu de ceux de gazon. Enfin les eaux jailliſſantes animent la beauté des jardins ; cependant il faut que la quantitée ſoit proportionnée à la grandeur du lieu ; l'induſtrie dans la diſpoſition conſiſte à faire que peu paroiſſe beaucoup ; les eſpeces ſont les jets, les caſcades, dont les napes doivent être ſuffiſamment garnies ; & enfin quelque piece d'eau ou canal. Les eaux ont encore donné occaſion à la conſtruction des grottes, qui ſe font en imitation des antres des montagnes. L'ordre qui les décore par dehors eſt ruſtique & le dedans eſt enrichi d'ornemens maritimes, de pétrifications, de glaçons, de maſques & de feſtons de coquillage, mais le tout ſans confuſion, afin que l'Architecture ne perde point ſa forme non obſtant la Rocaille. On les orne auſſi de figures & de fontaines, & elles doivent être expoſées au Nord pour y conſerver la fraicheur.

VII. On trouve que de tout tems toutes les Nations, chez leſquelles les beaux arts & les ſciences ont fleuri, ont tâché de donner tout ce qu'elles pouvoient de beauté & de magnificence aux lieux deſtinés à l'exercice ſolennel de leur Dévotion ; de maniere que ces ſortes de bâtimens ont donné à l'Architecture ſon origine & ſes progrès. Mais ſans nous arrêter à ces Temples, dont il ne nous reſte que peu ou point de monumens ; nous remarquerons ſeulement ce qui concerne les Egliſes des Chrétiens. Leur plan eſt ordinairement une figure de Croix. Cette Croix eſt ou Grecque ou Latine. La Croix Grecque eſt celle qui a les quatre bras égaux, au lieu que la Latine en a un plus long que les autres. Les Gothiques du tems moyen qui nous reſtent ſont ordinaire-

ordinairement bâties de cette maniere. Le concours des quatre bras est souvent surmonté d'une voûte ronde ou octogone, &c. ce qui fait ce que l'on appelle aujourd'hui un Dôme. Le grand bras s'appelle la nef, qui se trouve le plus souvent accompagnée d'un ou de deux collateraux ou bas côtés, où on a fait des Chapelles. Le devant de cette nef, qui donne la principale entrée, où le grand Portail, est surmonté d'un ou de deux clochers. Le bras opposé à la nef est ce que l'on appelle le Chœur, qui se termine par trois faces ou circulairement. Ce Chœur est ordinairement tourné au Levant, quoiqu'il n'y ait pas de régle préscrite pour cela. On suit à peu près cette disposition aujourd'hui; & comme le Dôme est la partie qui reçoit le plus de décoration, il est devenu la partie la plus considerable de l'Eglise. Le comble des Dômes est ordinairement un Elliptoïde dont on trace la figure,& même l'épure si l'on veut de la maniere suivante: Ayant tiré les deux lignes d'équerre AB, AE, on porte sur AB jusques en D, la hauteur du Dôme depuis le rez-de-chaussée en parties d'échelle & on détermine sur AE le point E, qui doit être selon les mêmes parties le point de vûë, auquel le Dôme à construire se doit présenter le plus avantageusement; ce point ne doit être distant du centre A, que d'environ deux fois la hauteur AD. On éleve sur l'hypotenuse DE la perpendiculaire DF égale au demi-diametre du Dôme pris dans les mêmes parties de l'échelle, & on tire une nouvelle hypotenuse FE, & par le point A la ligne AN parallele à DF, qui coupe DE en G, & ayant pris GM égale DG, on tire la ligne AMI. Après quoi portant sur AG, depuis A en H, le demi-diametre du Dôme de toute sa grandeur pour faire l'épure, ou telles autres parties que l'on veut, qui puissent servir pour la dimension du trait à faire, on tire par le point H la ligne BI parallele à FE, & faisant BK égale AI, Fig. 46.

Digitized by Google

on divisera AK en deux également au point C, ce point C sera le centre de l'Ellipse à décrire, dont CL, parallele à AE, & égale à AH, sera le petit demi-diametre, & BC le grand; le point N détermine le bourseau; d'autres aiment mieux prendre pour son diamétre le tiers de celui du Dôme. Ce comble est surmonté d'une Lanterne, dont la largeur est la moitié de celle du bourseau. La Tour du Dôme est au moins percée de 8. croisées; on en peut même augmenter le nombre jusqu'à 12. ou 16. Cette Tour doit être fortifiée entre les croisées de piliers buttans en forme de pilastres & de colonnes saillantes, & on met des statuës ou des candelabres au dessus de l'entablement de ces colonnes, qui fait saillie en ces endroits. Quand les Dômes sont de médiocre grandeur on n'y met pas ordinairement des pilliers buttans; on se contente d'y placer des pilastres avec un sixiéme de saillie, ou deux accouplés contre la croisée. On fait aussi assez souvent un Attique au dessous du comble du Dôme pour l'élever sur la Corniche de l'Ordre de la Tour. Et cela lui donne beaucoup de majesté; mais dans ce cas le diamétre du Dôme devient plus petit que celui de la Tour; car il ne doit être que du diamétre qui est entre le nud des pilastres de l'Attique, lequel est plus petit que celui de la Tour du double de la saillie de la base de l'Attique. Car la base de ses pillastres doit être sur le nud de la Tour. La couverture des Dômes est d'ardoise, il y a des Côtes, Bourseau, Lucarnes en oëil de bœuf, des Festons & feüillages de plomb doré, &c. La voûte en dedans admet des beaux sujets de peinture. Le dedans des Eglises consiste ordinairement en un grand ordre d'Architecture, qui est le plus souvent le Corinthien, & de pilastres accouplés. Cet Ordre peut être surmonté d'une espece de soubasse-

Digitized by Google

ment ou piedeſtal, qui ſoutient la voûte en berceau, laquelle ou ſeulement ſes arcs doubleaux qui répondent ſur les colonnes ou pilaſtres ſont ornés de guillochis, d'entrelas ou de compartimens de differentes manieres. Cette voûte principale eſt percée de lunettes, qui vont aboutir chacun à ſon vitrail. Si on fait des piedeſtaux ſous l'Ordre, il eſt bon de leur donner environ ſix pieds de hauteur, afin que les parties ſaillantes ne ſouffrent point de l'attouchement. Les bas côtés de part & d'autre de la nef conſiſtent quelquefois en Chapelles, dont les ornemens ſoit des Autels ou des tombeaux contiennent ſouvent tout ce qu'on peut ſouhaiter de riche & de magnifique tant par rapport à la matiere, que par rapport à la fineſſe de l'art & de la perfection du deſſein. Sous le milieu du Dôme ſe place le plus ſouvent le grand Autel, que l'on accompagne d'un très-bel ouvrage d'architecture qui lui ſert d'une eſpece de Day ou de Baldaquin. Dans les plus beaux exemples on employe des colonnes torſes. Pour en faire le deſſein on diviſe toute la hauteur du vif de la colonne en 48 parties égales; & comme c'eſt l'axe qui fait une eſ- *Fig.* 47.
pece de vis, on détermine les ſaillies ſur chacune de ces parties par le moyen d'un petit cercle, qui marque le plan de l'éccentricité de l'axe, ſon rayon eſt de $\frac{2}{7}$ du module ou plus, ſi on veut la colonne plus torſe; on diviſe ce petit cercle en 8 parties égales, & on tire par ces points des lignes paralleles à l'Axe droit; mais pour le commencement & pour la fin on ſe ſert des points C. 1. 2. 3. 4. qui ſont dans ce petit cercle une ſpirale, & pour les 4. dernieres ſail- *Fig.* 48. *n.*
lies on revient à une pareille ſpirale, mais qui va de l'autre 1.
côté. Le deſſein fait mieux connoître cette operation qu'une *n.* 2.
longue deſcription. On place ces colonnes enſorte que les deux voiſines ſoient torſes en ſens contraire; & comme

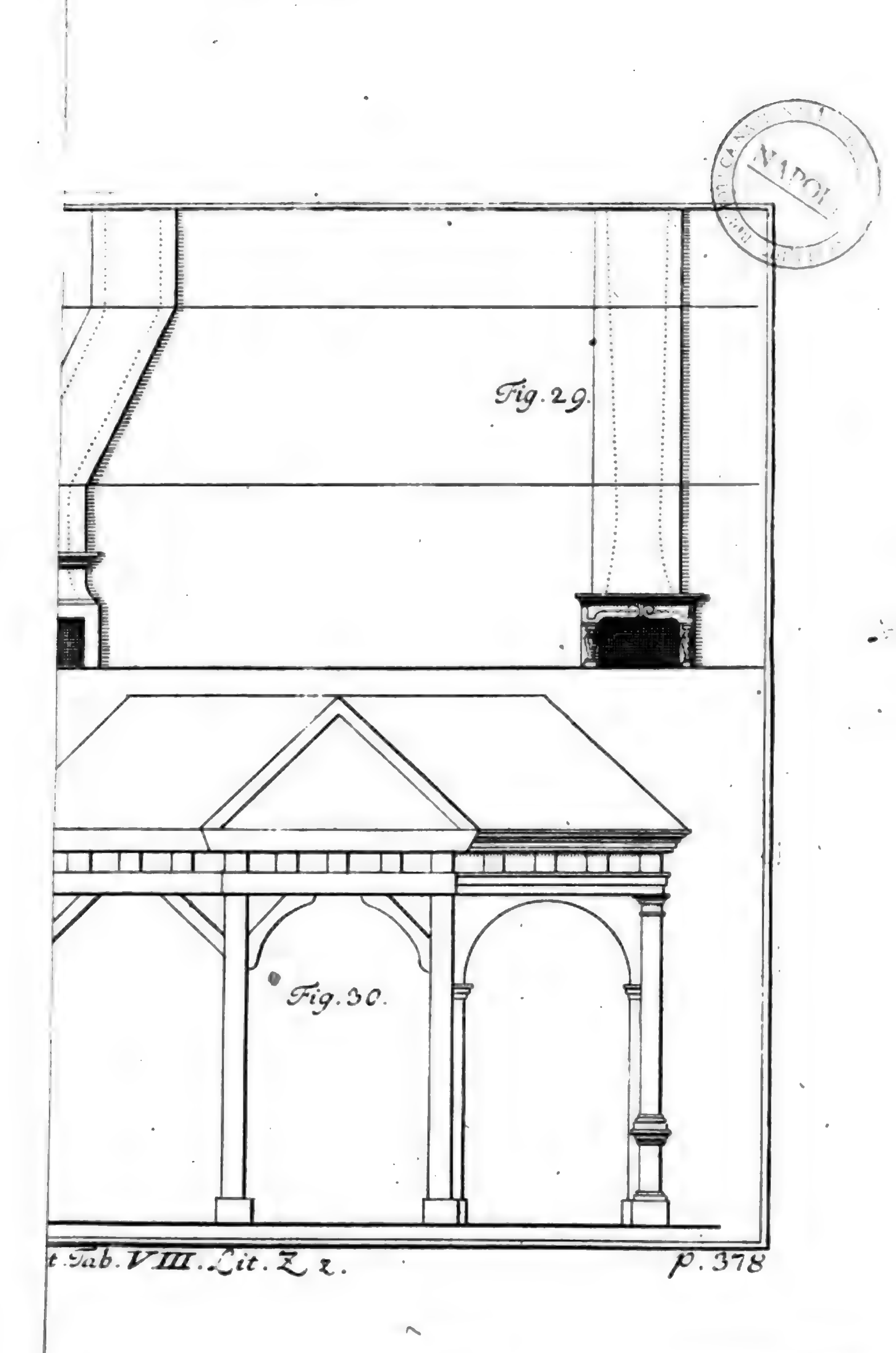
elles ſont d'une apparence fort foible, elles ne portent que chacune ſon entablement ſéparé ; tout au plus elles n'ont que la Corniche commune ; le reſte du Baldaquin termine en amortiſſement, qui doit paroître leger. Si une Egliſe eſt pavée de marbre, on y obſervedes compartimens correſpondans à la voûte qui eſt au deſſus. Enfin la façade où eſt la principale entrée de la nef, & que l'on appelle ordinairement le Portail, eſt encore une piece qui reçoit beaucoup d'ornemens ; elle eſt percée de la grande Porte, qui eſt quelquefois accompagnée de deux moindres pour les Collateraux, & au deſſus d'un grand vitrail. La décoration de cette façade eſt ou un portique de 6. ou 8. Colonnes iſolées de front, ou bien ce ſont deux ou trois Ordres d'Architecture poſés les uns ſur les autres avec des frontons, des ſtatuës, &c. On y voit enployé ou les trois Ordres Grecs, ou le ſeul Corinthien répeté deux fois, ſi c'eſt lui qui regne intérieurement ; ou il y a en ce cas le Romain ou Compoſite rangé au deſſus du Corinthien. La ſimplicité des régles de l'Architecture eſt dans ces ſortes d'ouvrages infiniment plus eſtimée, qu'une quantité d'ornemens ſuperflus, qui ne manquent jamais d'encourir la critique, d'autant qu'en fait de bâtimens tout le monde croit être en droit de s'ériger en Cenſeur.

FIN DE L'ARCHITECTURE.

Digitized by Google

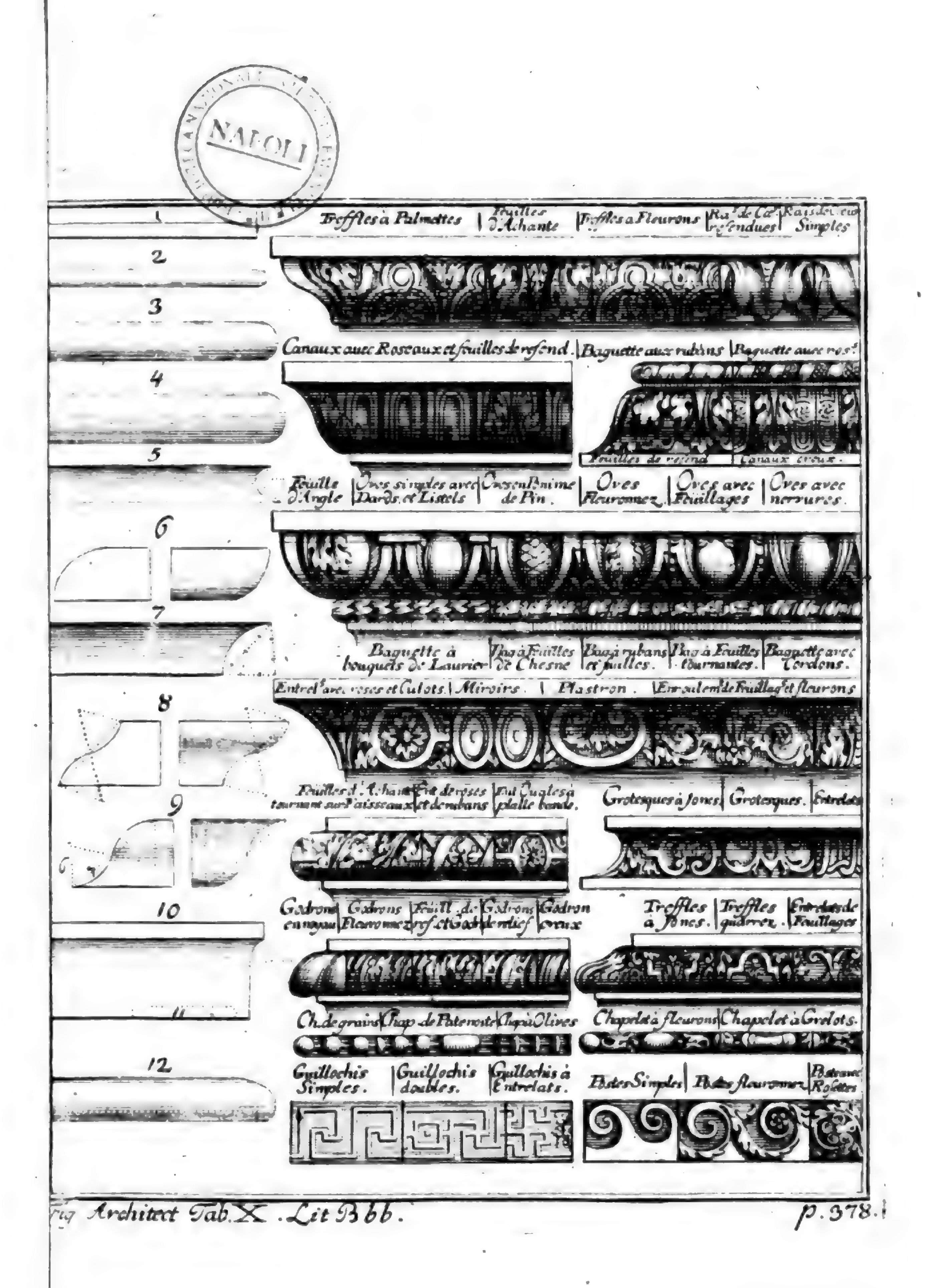
TRAITÉ
DE
PERSPECTIVE.

Digitized by Google



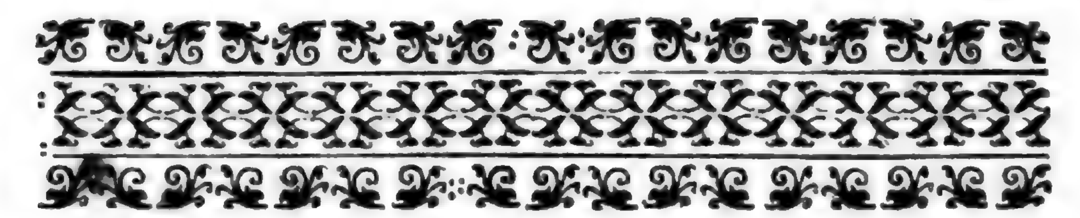
t. Tab. VIII. Lit. Z z.

Digitized by Google

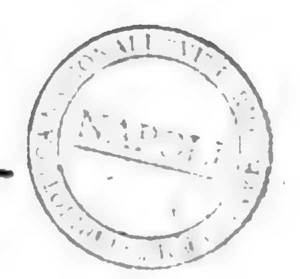


NAPOLI

Digitized by Google



TRAITÉ DE PERSPECTIVE.


NAPOLI

PREMIERE PARTIE.

I.

LA Perſpective eſt une partie de l'Optique, qui nous enſeigne à déſigner les objets ſuivant qu'ils ſe préſentent à la vûë, eû égard à la diſtance & à la poſition de l'œil ; & à marquer leurs ombres. La premiere partie traite du Deſſein des objets, la ſeconde des Ombres.

II. Nous donnerons trois manieres differentes pour faire la repréſentation des objets. Les deux premieres ſuppoſent que l'on ait le plan & l'élevation des objets que l'on veut repréſenter; au lieu que la troiſiéme ne demande qu'un devis, ou la connoiſſance de la dimenſion des objets, & leur ſituation.

PREMIER CHAPITRE.

Contenant la premiere Métode.

I.

POUR donner cette métode avec ordre, nous ne donnerons d'abord que le Plan perſpectif de quelques figures, dont les premieres ſeront rectilignes, d'où nous paſſerons au Cercle.

II. Pour donner le Plan perſpectif du quarré propoſé ABCD, on ſuppoſe 1.° que l'œil ſe touve dans une Fig. 1. certaine diſtance, comme ſeroit, par exemple, le point E, au deſſus duquel il ſe trouve élevé perpendiculairement. 2.° Que la direction de la vûë va ſelon la ligne EFG, après quoi on tire à cette ligne la perpendiculaire HFI à volonté, en deçà de la figure ABCD, que l'on appelle la ligne fondamentale.

III. Si on conçoit deſſus cette fondamentale un plan vertical diaphane, comme ſeroit une glace de miroir, il eſt évident que les rayons viſuels, qui partent de l'œil, que l'on ſuppoſe élevé à plomb, au deſſus du point E, à une hauteur déterminée, & qui vont rencontrer les points A.B.C.D du plan propoſé, traverſeront cette glace dans des points tels, que les joignant par des lignes droites, la figure repréſentera le plan perſpectif, c'eſt-à-dire, l'objet tel qu'il ſe préſente ſur le tableau ; de ſorte que l'œil reſtant toujours à ce même point, il lui eſt indifferent de voir l'objet même, ou ſa repréſentation ſur le tableau.

IV. On connoît aiſément par-là que plus le tableau eſt poſé près de l'objet, plus la repréſentation eſt grande, &

Digitized by Google

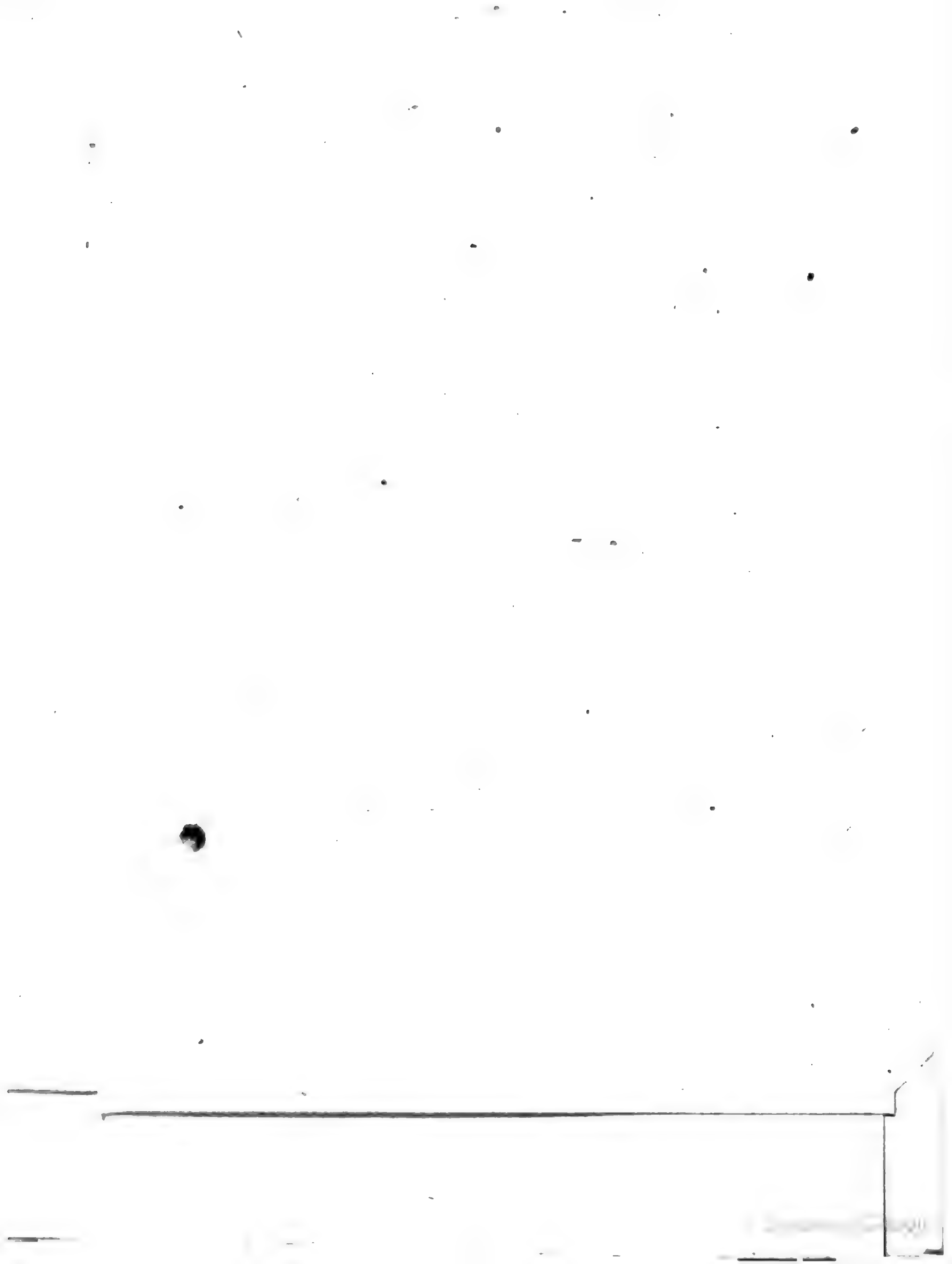
To[...]

Cornich[...]thien		H.C.S.	Romain		H.C.S.
[...]e	2 m	2.2 m	Corniche	2 m	2 m
l'Ove ou q[...]	1	53.	reglet	1½	51.
astragale	3.		cimaise ou gueule droite	5.	
reglet	½	48	reglet	[illegible]	[illegible]
Larmier	1.		[illegible]		
			reglet	1.	
Base du Piedestal	12		Base du Piedestal	12.	
reglet	1.		astragale	1.	
Zocle ou plin[...]rsée	3.		talon renuersé	3.	
	1.		reglet	1.	
	3.		tore	3.	
	4.	1.15	plinthe	4.	1.15
Impost[...]e	16.				
	1½	6.			
	1½				
	3.				
	2½				
	½				
	6.				
	1.				
	½				
Archiuo[...]olte					
	1.				
	2.				
	5.				
	2.				
	½				
	4.				
	½				
	3.				
aux [...] et on fait					
le piedroit	2. m		le piedroit	2. m.	
la largeur du [...] vuide	12. m		la largeur du vuide	12. m.	
la hauteur sous clef	25. m		la hauteur sous clef	25. m.	
aux [...]lonne et on fait					
le piedroit	1½ m.		le piedroit	1½ m	
le vuide	9. m.		le vuide	9. m	
hauteur sous clef	18. m.		hauteur sous clef	18. m.	

Fig. Architec[...]

P. 38

NAPOLI
NAPOLI
Google



qu'au contraire elle est plus petite, plus le tableau est posé près de l'œil; puisque c'est en lui que tous les rayons concourrent.

V. Ainsi pour faire cette représentation, tirez la ligne indéterminée HI, qui sera la base ou la ligne fondamentale. Prenez-y à discretion le point E, & élevez la perpendiculaire EO de la hauteur que vous déterminez l'élevation de l'œil en O, tirez par O la ligne OP parallele à la base HI, faites OP égal à FE, le point P sera le point d'éloignement; O le point de l'œil; & la ligne OP l'horizontale de l'œil. Il est indifferent de porter OP à droite ou à gauche sur cette horizontale; cependant il est bon de la porter du côté où se trouve la plus grande partie du Plan, comme ici à droite; & même si la figure est fort composée, & que la direction de la vûë y passe à peu-près au milieu, on porte cette distance OP de part & d'autre, pour operer sur des lignes moins longues & avec moins d'embaras. *Fig. 2.*

VI. Cette préparation étant faite, vous portez la distance A1, prise dans le plan, sur la fondamentale du perspectif, depuis E en 1', ensuite prenant du même point A l'intervale jusqu'au tableau A2, vous le porterez sur la base depuis 1 en 2. à l'opposite du point d'éloignement P, & tirant de 1 en O, & de 2 en P, les deux lignes droites, qui se coupent au point *a*. Ce point *a* sera celui du tableau qui correspond au point A, du plan proposé. Vous porterez de même la distance B 3, prise du point B, à la direction de la vûë EG depuis E en 3, & l'intervale B 4 depuis 3 en 4, & l'intersection des lignes O 3, P 4 vous donnera le point *b* dans le perspectif correspondant du point B du plan; & ainsi des autres; après quoi joi-

gnant ces points *a*, *b*, *c*, *d* par des lignes droites, vous aurez le quarré perſpectif qui étoit à faire.

Fig. 3. & 4. VII. La figure ſuivante eſt une étoile exagonale décrite à l'entour d'un cercle. L'operation eſt faite avec deux points d'éloignement, & puiſque les ſix points des angles rentrans ſont au cercle, on décrit le Cercle en tirant de l'un de ſes points à l'autre des arcs, dont le pourtour total fait le plus ſouvent une ellipſe.

VIII. Ainſi lorſqu'il ſe préſente une figure circulaire ou quelque autre courbe à tirer en perſpective, on prend ſur cette courbe pluſieurs points à diſcretion, que l'on cherche les uns après les autres par la métode ſuſdite dans le perſpectif, & joignant ces points par des traits courbés à la main, on aura la repréſentation perſpective de cet arrondiſſement. Il eſt bon de prendre plus de point du côté qui eſt vers l'œil, que de l'autre côté, qui ſe reſerre à cauſe de ſon éloignement.

IX. Il eſt à remarquer qu'il y a un cas, où un cercle, qui eſt dans le plan, eſt repréſenté par un cercle dans le perſpectif; & c'eſt lorſque la direction de la vûë paſſant directement par le centre, l'élevation de l'œil eſt moyenne proportionelle, entre les diſtances depuis le pied

Fig. 5. de l'œil juſqu'à la circonference convexe & concave du cercle. Soit pour cet effet FHG le cercle du plan, LK la ligne fondamentale, FE la diſtance du pied de l'œil au tableau, EH la touchante ou moyenne proportionelle

Fig. 6. entre GE & EF, il eſt évident que dans le profil, FL doit être égal à 2 FK, afin que la repréſentation perſpective donne un cercle

Or $EF = a$. $FG = 2r$. on aura $EH = \sqrt{a^2 + 2ar}$, & puiſque

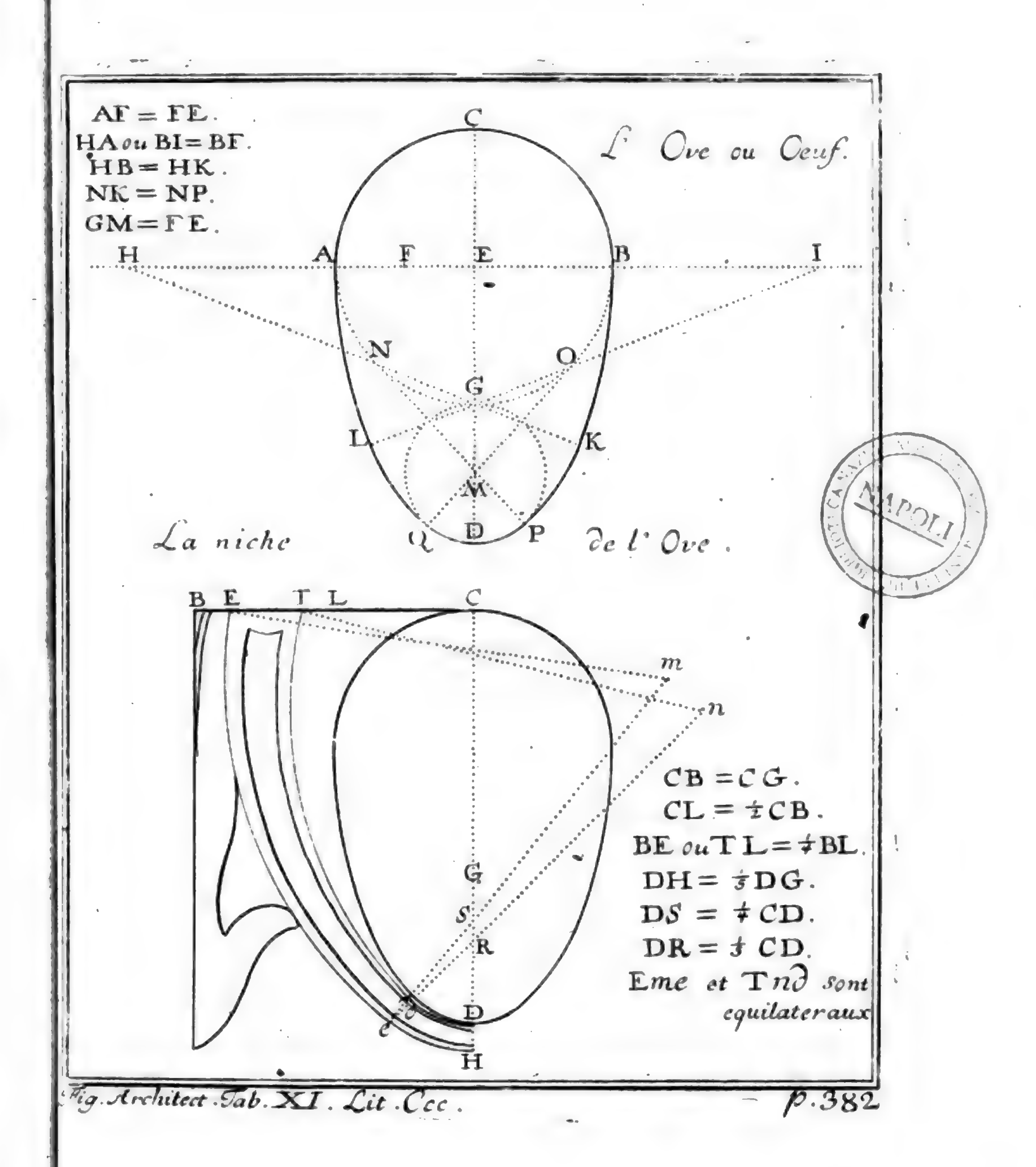
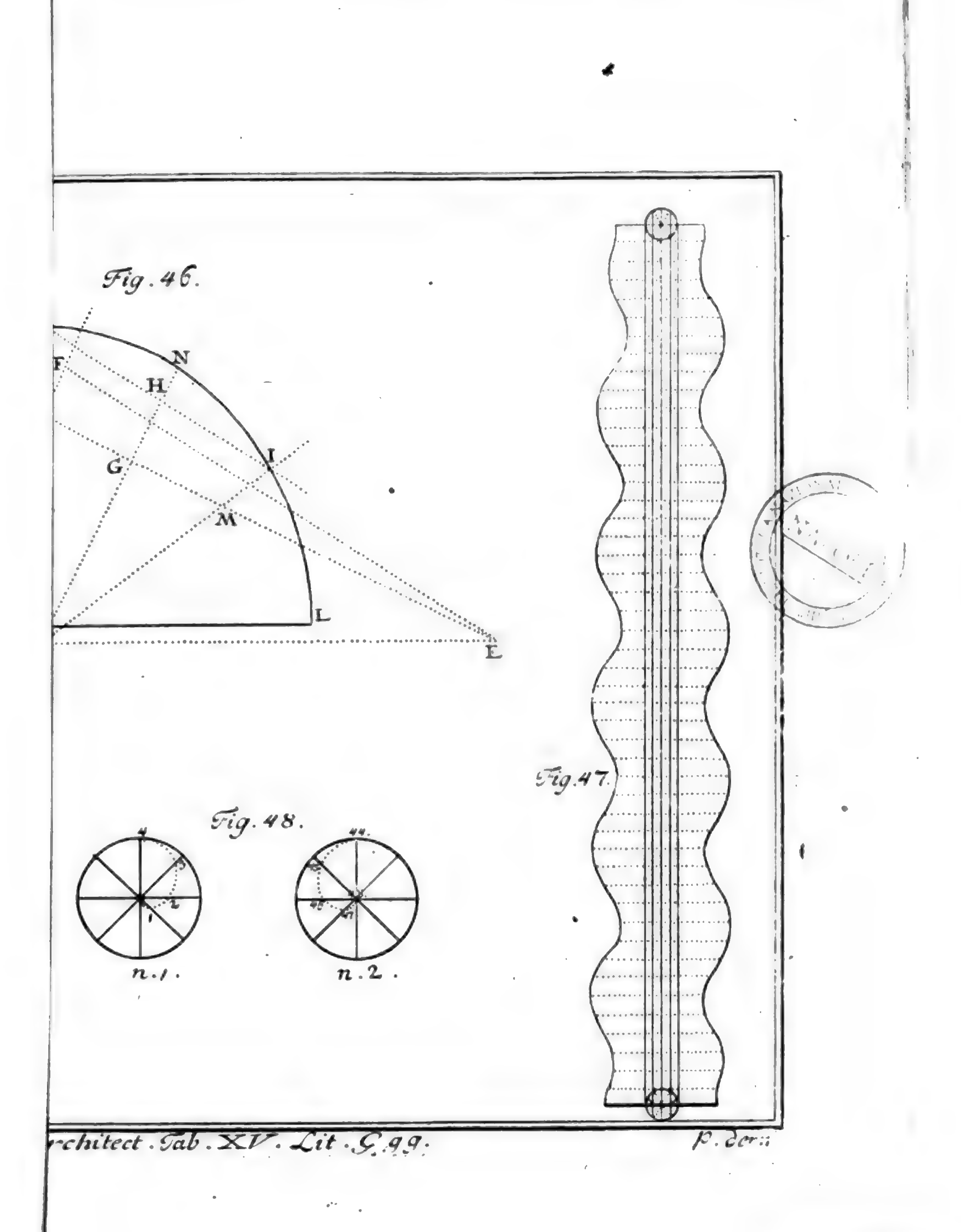


Fig. Architect. Tab. XI. Lit. Ccc. p. 382

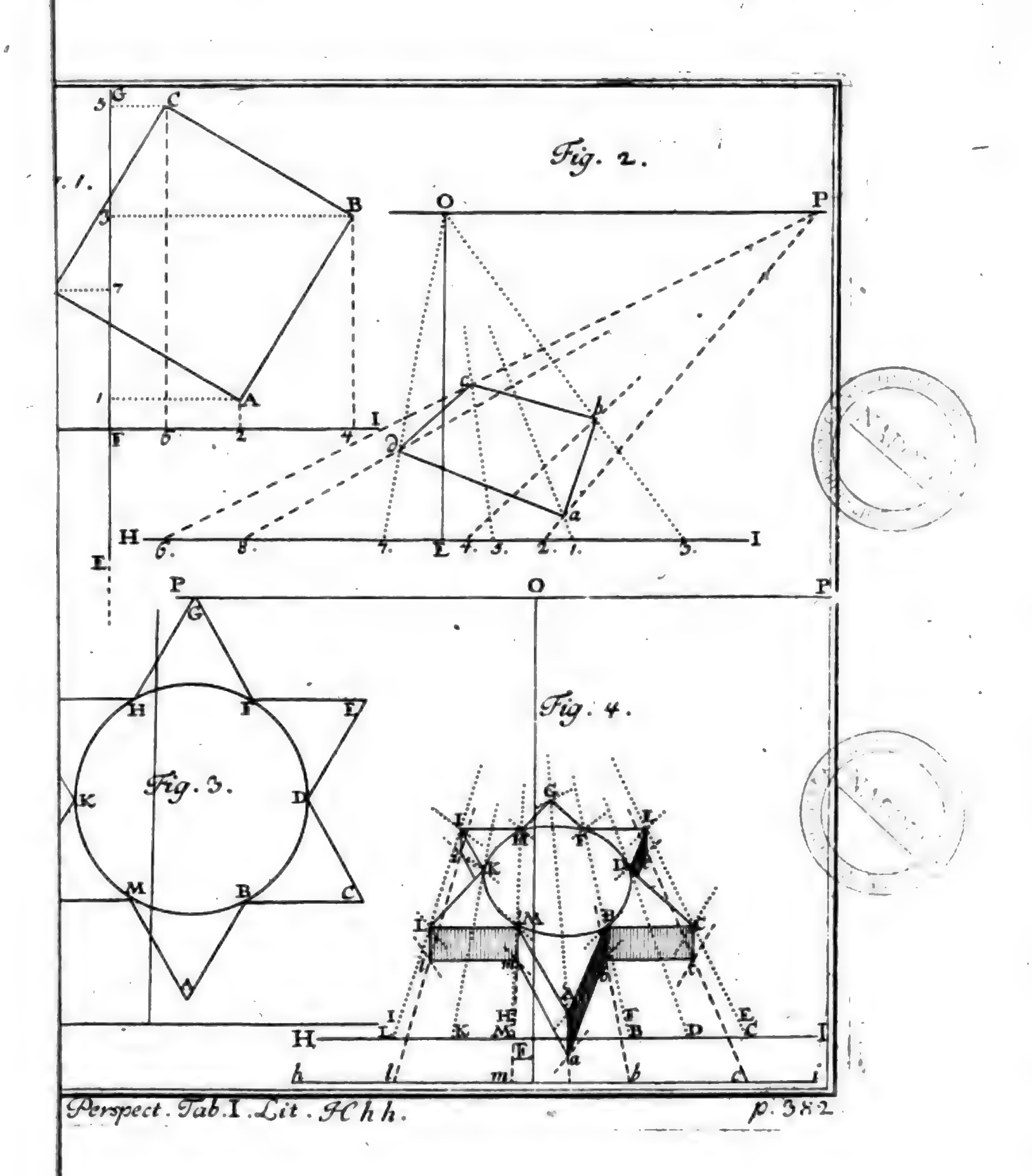
NAPOLI



rchitect. Tab. XV. Lit. G. 99.

P. der.

Digitized by Google



Perspect. Tab. I. Lit. Hhh.

Digitized by Google

EH : DH :: EF : FK

$\sqrt{a^2+2ar} : r = a : \frac{ar}{\sqrt{a^2+2ar}}$ nous aurons KL $= \frac{2ar}{\sqrt{a^2+2ar}}$

Et de plus GF : FL :: GE : EO = EH

$$2r : \frac{2ar}{\sqrt{a^2+2ar}} = a+2r : \frac{a^2+2ar}{\sqrt{a^2+2ar}} = \sqrt{a^2+2ar}$$

$$_{2r}\frac{2a^2r+4ar^2}{\sqrt{a^2+2ar}}$$

Et quand on avanceroit le tableau vers l'œil, ce seroit toujours la même chose.

X. Si l'élevation de l'œil est donnée, on peut trouver aisément par ce qu'on vient de dire, quelle doit être la distance FE pour le même effet; & cette position de l'œil est d'autant plus à remarquer, qu'elle expose les plans le plus avantageusement à la vûë.

XI. Si l'objet que l'on veut représenter est solide, & qu'il ait une épaisseur par tout égale, comme l'étoile exagonale, il est bon de représenter d'abord toute la surface supérieure, qui tombe sous la vûë; ensuite on tire sous la base HI une autre base *hi*, dont la distance est égale à l'épaisseur donnée; & on cherche sur cette nouvelle fondamentale seulement des points qui peuvent paroître dans la représentation; de même que ceux dont on peut avoir besoin pour la direction de certaines lignes, dont néanmoins quelque extrémité se cache. *Fig.* 4.

XII. Si l'objet à représenter souffre du changement dans ses differentes hauteurs, tels que pourroient causer les croisées, &c. dans un bâtiment; ou qu'il change au-

Digitized by Google

trement de figure, il faut prendre ces differentes hauteurs les unes après les autres dans l'élevation du corps; qui nous donneront de nouvelles paralleles à la fondamentale, sur lesquelles on cherche les points qui conviennent, toujours moyennant les mêmes deux points O, & P, qui sont celui de l'œil & celui de l'éloignement, quoiqu'il arrive que quelquefois ces paralleles se trouvent audessus de l'horizontale de l'œil, comme il est aisé de connoître par la figure.

CHAPITRE SECOND.

Qui donne la seconde métode.

I. LA métode précedente a l'inconvenient de charger la figure de trop de lignes, lorsqu'il y a beaucoup de points à chercher dans l'objet; ainsi il vaut mieux se servir en ce cas de la métode suivante.

Fig. 7. II. Soit le plan proposé un pentagone régulier AB CDE; la ligne fondamentale HI; la distance du tableau au pied de l'œil FE. Tirez d'abord de tous les angles de la figure des lignes droites au point E, qui coupent la fondamentale aux points *r*, *s*, *t*, F, *u*.

Fig. 8. III. Quant à l'élevation, il est à remarquer que dans cette métode, il faut la représenter conforme aux perpendiculaires, qui tombent dans le plan des points de la figure sur la direction de la vûe, comme sont dans cette figure les points *a*, *b*, *c*, & leur ayant donné la hauteur déterminée de l'épaisseur du corps, comme A*a*, *b*B, on tire la perpendiculaire FK, qui est le tableau, à sa distance requise; ensuite on éleve au point E, qui est la distance du pied de l'œil, la perpendiculaire EO, qui est la hauteur

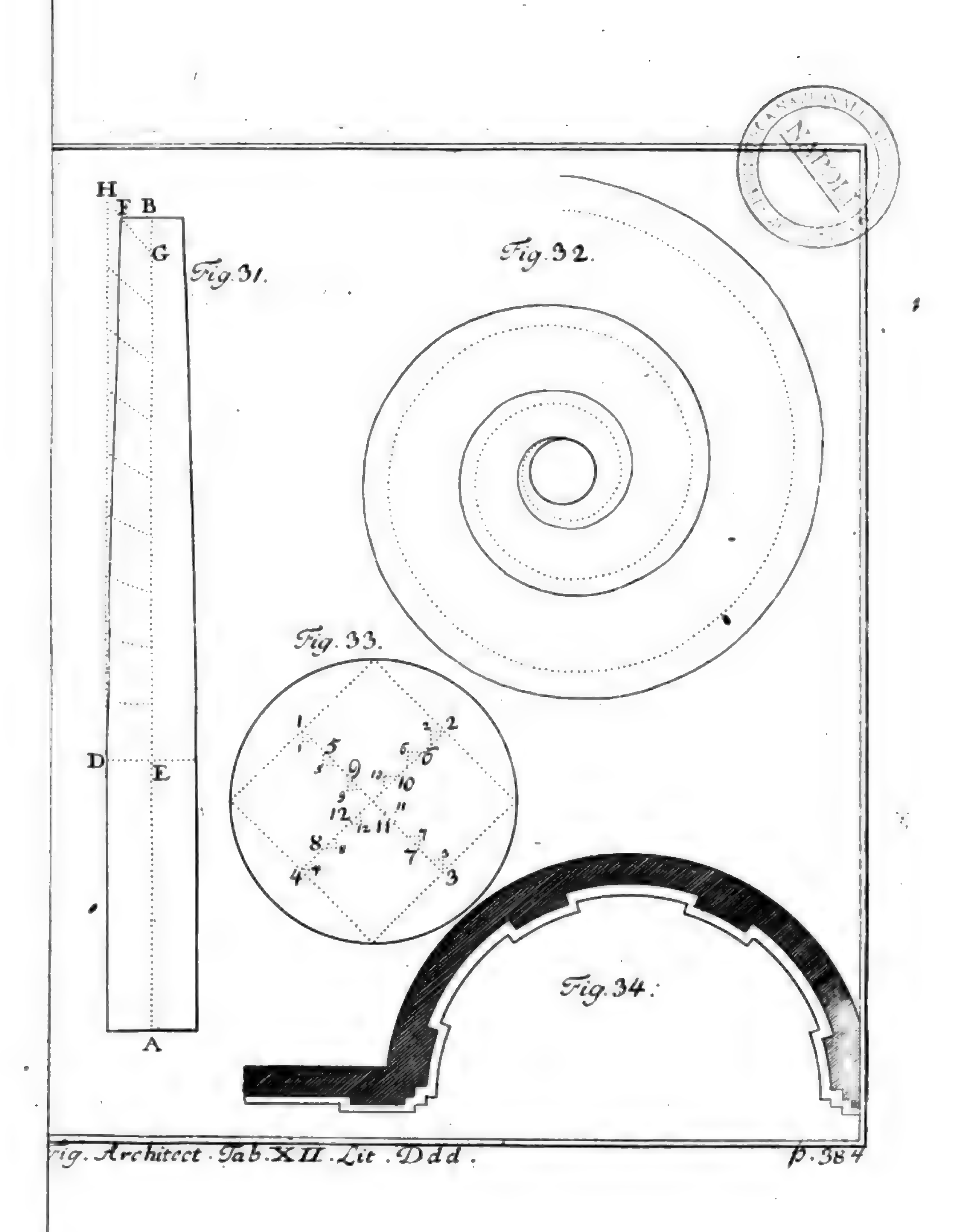


Fig. Architect. Tab. XII. Lit. Ddd. p. 384

Digitized by

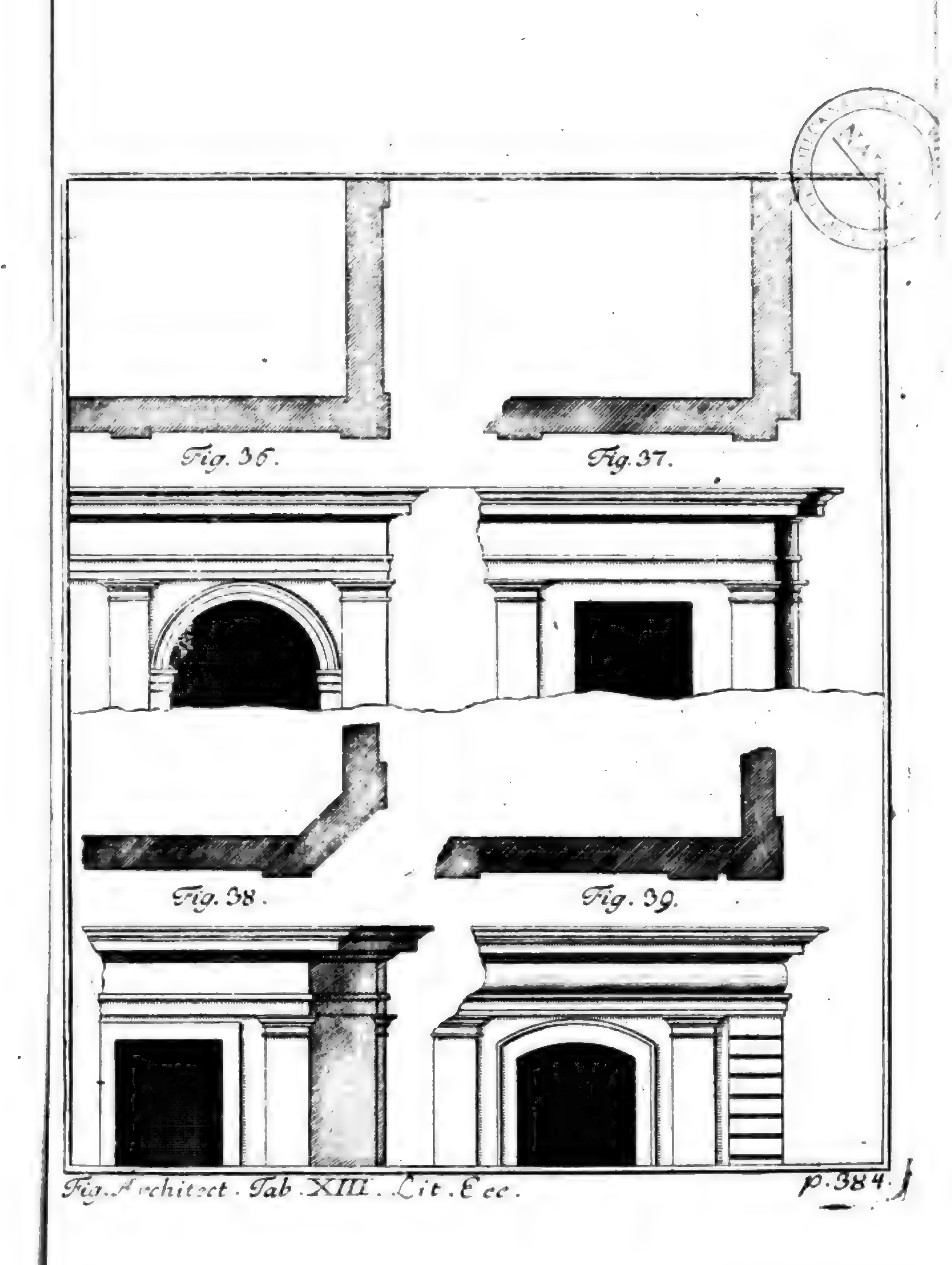


Fig. Architect. Tab. XIII. Lit. Eee. p. 384.

hauteur de l'œil, & on tire du point O à tous les points de l'élevation, qui peuvent paroître des lignes droites, qui coupent le tableau FK, comme aux points 1, 2, 3, 4, 5, &c.

IV. Cette préparation faite, vous formerez un tableau de la représentation perspective, en tirant la ligne fondamentale HI, sur laquelle vous éleverez au point F pris à discretion, FG, qui est le plan de la direction de la vûë, & vous élevez de même des points H & I pris à discretion, ensorte que les points *r* & *u* des plus grandes distances de part & d'autre s'y trouvent alaisés, deux autres perpendiculaires, qui seront les côtés du tableau. Portez sur ces perpendiculaires les hauteurs F 1, F 2, prises dans l'élevation ; & tirez les paralleles 1, 1, 2, 2, portez des points, où ces lignes coupent la ligne FG, la distance F*t* prise sur la fondamentale du plan, & vous aurez deux points, qui marquent les points A & *a* de l'élevation. Ensuite vous porterez les hauteurs F 3, F 4. sur les mêmes côtés du tableau, & ayant tiré les paralleles 3. 3, 4. 4, vous y porterez de part & d'autre, depuis la même ligne FG, les distances F*r*, F*u* prises du plan, &c. après quoi joignant les points comme la figure le montre, vous aurez la perspective du corps proposé. *Fig.* 9.

V. Il y a un avantage assez considerable à cette métode, qui est, que lorsque le plan & l'élevation sont petits, on en peut néanmoins produire la perspective assez grande. Le tout consiste à placer le tableau derriere la figure tant du plan que de l'élevation, comme il paroît par la figure qui représente l'intérieur d'un vaisseau voûté en plein ceintre, où les chiffres tirés de l'élevation, marquent les hauteurs des paralleles à tirer dans le tableau, & les lettres tirées du plan marquent les distances qu'il *Fig* 10, 11, 12.

faut porter de part & d'autre sur les paralleles respéctives, pour déterminer les parties des côtés fuyans.

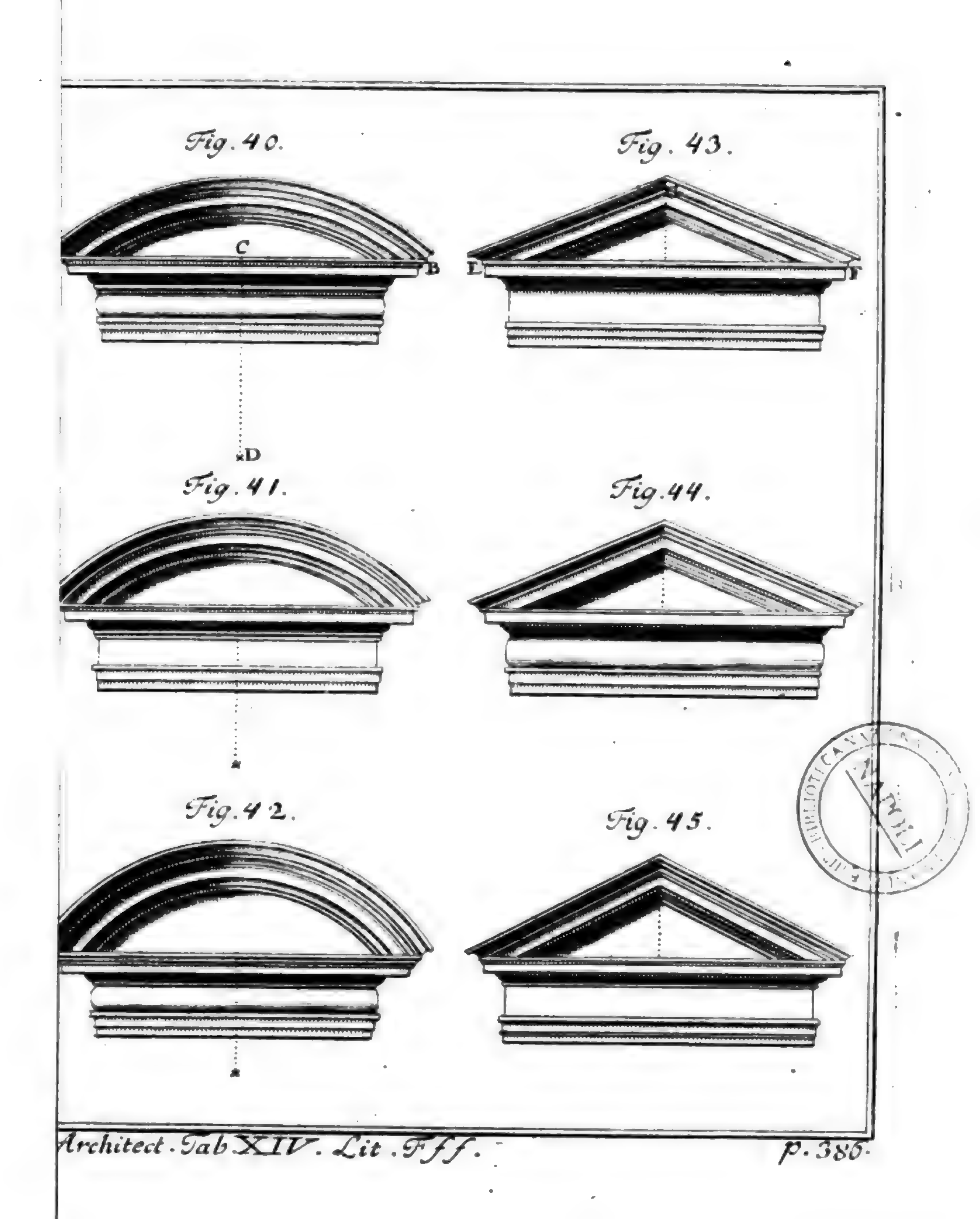
VI. On peut aisément connoître par ce qu'on vient de dire de cette métode, que lorsque le plan & l'élevation proposés sont d'une grandeur moyenne, ensorte que le tableau étant posé devant la figure, la représentation deviendroit trop petite, & qu'au contraire elle deviendroit trop grande le tableau étant posé derriere; on peut concevoir que ledit tableau passe à travers la figure même; puisqu'on ne fait attention qu'aux points, où le tableau est coupé par des lignes qui, partant de l'œil aboutissent aux points de l'objet que l'on veut représenter.

VII. Du reste cette métode devient embarassante, lorsqu'un objet, où il y a plusieurs points à remarquer, est exposé obliquement à la vûë. Car alors l'élevation étant accommodée suivant la situation oblique de l'objet, il naît un trop grand nombre de paralleles, en ce cas il est bon de ne tirer les paralleles qu'à mesure que l'on opere sur elles; & même il ne faut les tirer, que du côté où on en a besoin. Comme on voit par l'exemple de la
Fig. 13. 14. 15. 16. Vedette; où l'on observera en même tems, que les lignes du perspéctif des deux faces étant prolongées, elles se rencontreront de part & d'autre sur l'horizontale de la vûë, dans deux points, qu'on appelle points accidentels ou collateraux.

CHAPITRE TROISIEME.

Contenant la troisiéme Métode.

I. CETTE métode se sert des dimensions mêmes de l'objet pour en faire la représentation. La maniere la plus simple est celle qui représente en même tems le plan &



Architect. Tab XIV. Lit. Fff. p. 386.

Digitized by Google

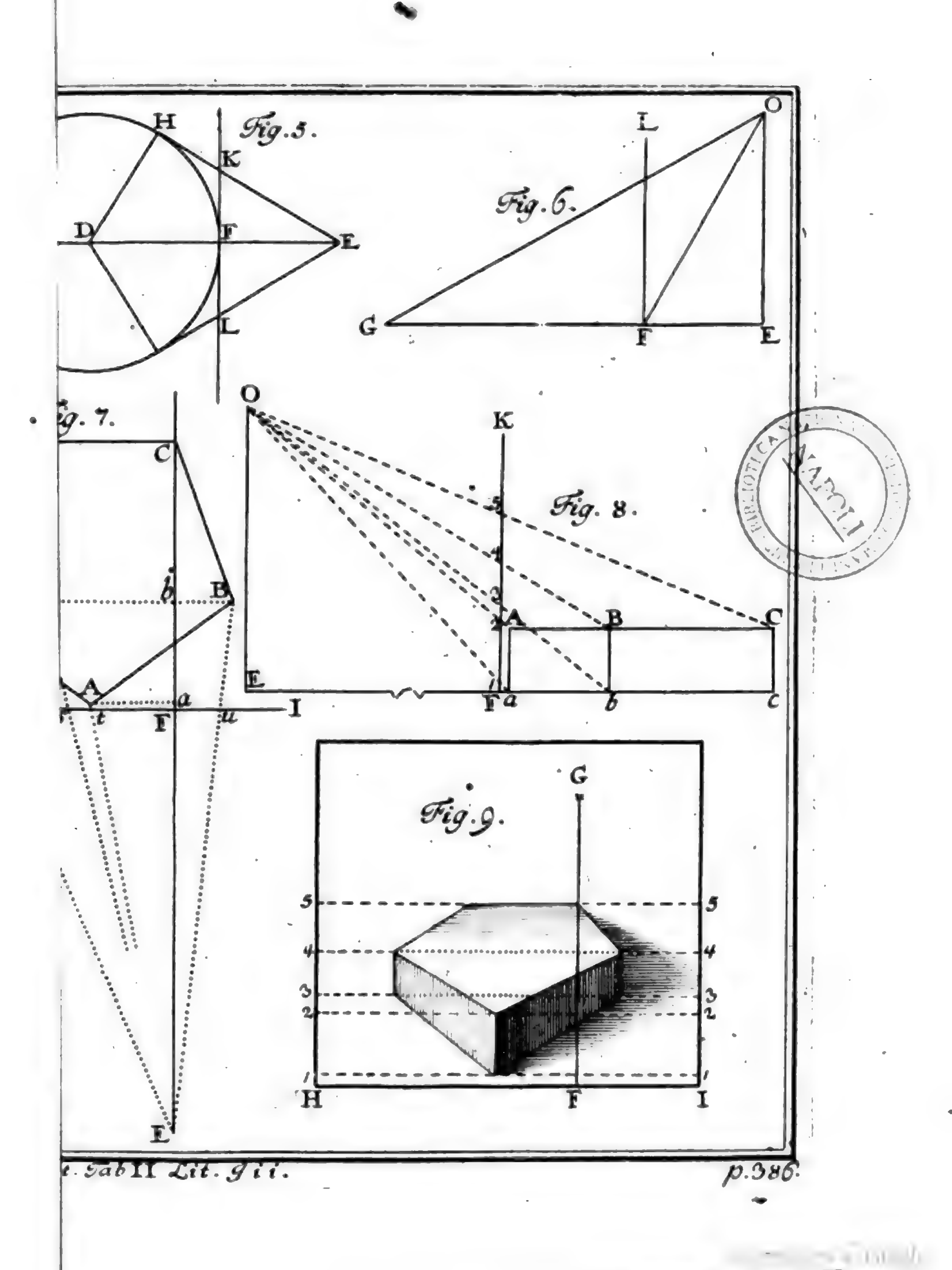


Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Tab II Lit. g i i.
p. 386.

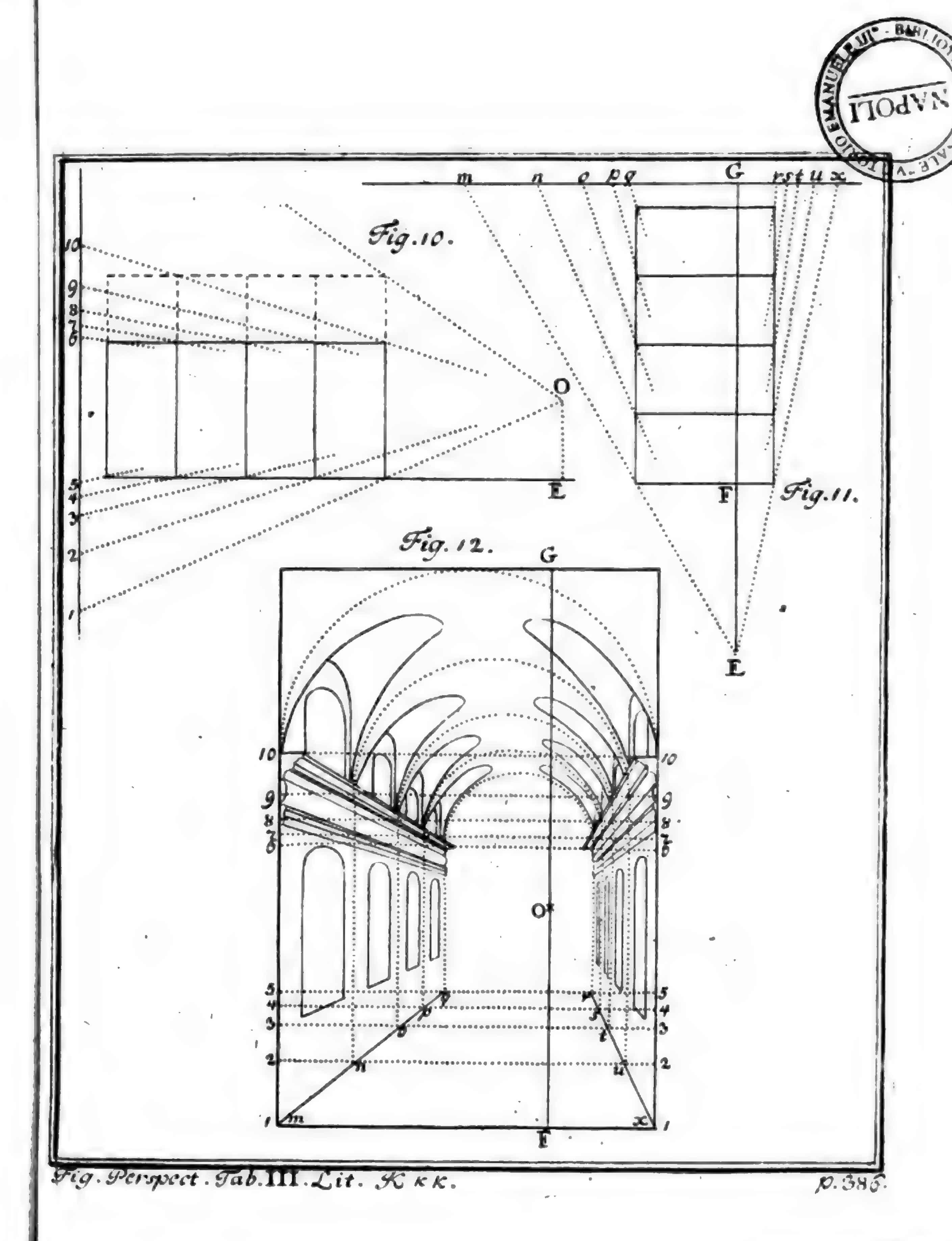
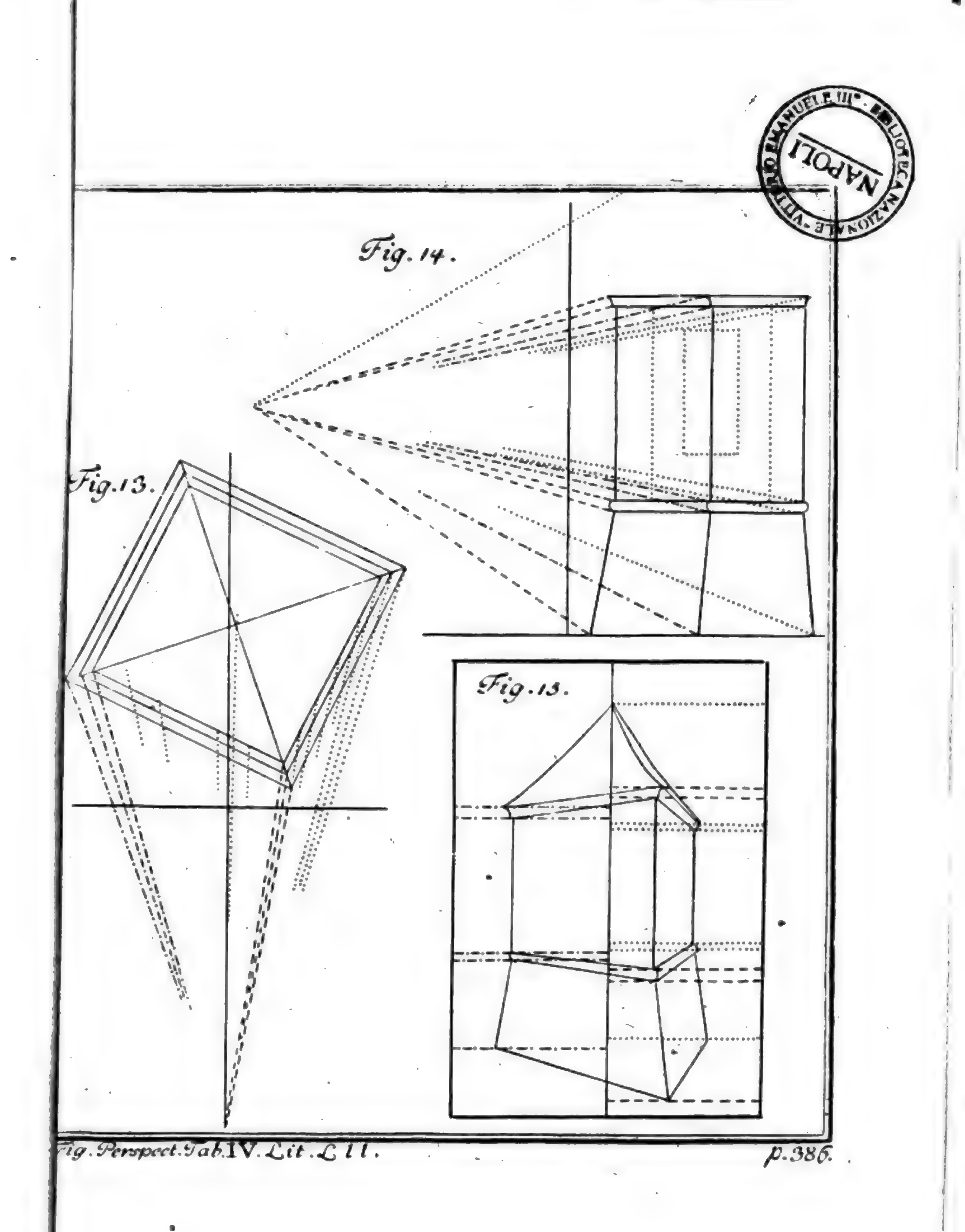


Fig. Perspect. Tab. III. Lit. Kkk. p. 385.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI



VITTORIO EMANUELE III° BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI

Fig. Perspect. Tab. IV. Lit. L l I.

Digitized by Google

l'élevation selon le géometral, & qui par conséquent suppose que l'objet est vû à une distance infinie, & sous un angle de 45.° en quoi elle differe du plan simple, qui représente l'objet tel qui paroîtroit à l'œil posé perpendiculairement au dessus de l'objet aussi à une distance infinie. On appelle cette maniere de dessigner *La Perspective Militaire*; parce qu'on s'en sert principalement pour représenter des Places fortes, dont on veut donner en même tems l'idée, tant du plan que de l'élevation.

II. Mais dès qu'on a supposé l'œil à une distance finie, on sçait que les parties de l'objet, d'ailleurs égales, paroissent plus grandes ou plus petites, suivant qu'elles sont plus proches ou plus éloignées de l'œil; ainsi lorsqu'on ne veut se servir que des dimensions pour dessiner en perspective, il faut se former des échelles differentes par rapport aux differentes distances ou éloignemens des parties de l'objet. Ces échelles sont de deux especes, les unes de front, les autres des fuyantes. Voici comme on les détermine sur le tableau même. Ayant déterminé le point de vûë O, & celui de distance P. comme à l'ordinaire, *Fig. 18.* prenez sur la base du tableau AB, autant de parties égales que vous voudrez, qui représentent des pieds, des toises, ou telles autres mesures que l'on voudra supposer, tirez de ces points des lignes droites au point de vûë ou à l'œil O, tirez aussi des mêmes points de la base des lignes au point de distance P, & marquez seulement les points où l'une des premieres comme AO est coupée par ces dernieres, comme en C, D, E, F, &c. tirez par ces derniers points des lignes paralleles à la base, lesquelles se trouveront coupées par celles qui vont à l'œil, en autant de parties égales, que vous en avez pris sur la base, & ce seront autant d'échelles de front de chaque

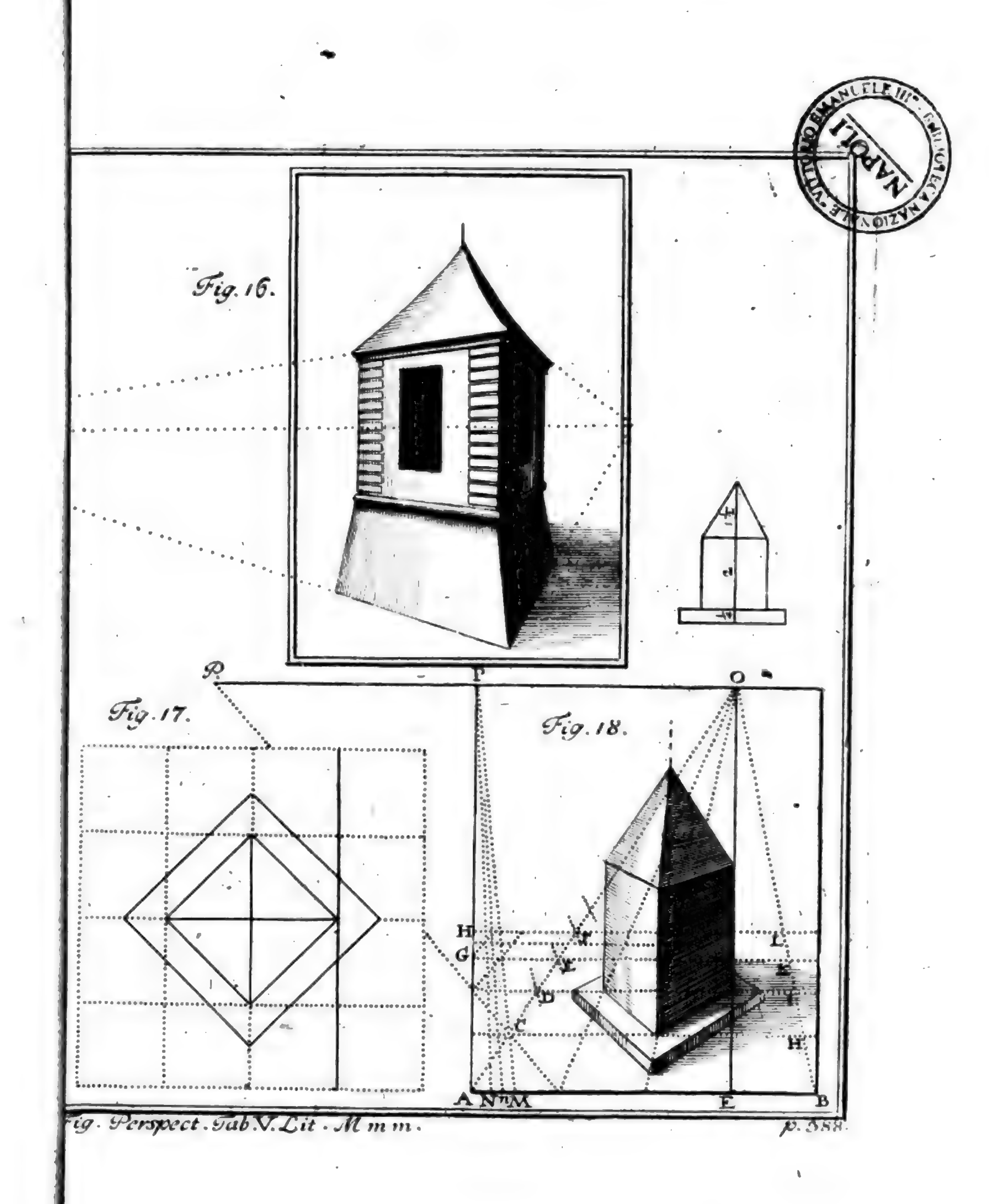
Digitized by Google

diſtance, au lieu que celles qui vont vers l'œil ſe trouvent diviſées en parties inégales, leſquelles néanmoins repréſentent des parties égales ; ainſi elles ſont ce que l'on appelle des échelles fuyantes.

Fig. 17. III. Moyennant ceci on peut repréſenter en perſpective une aire ou ſurface toute diviſée en quarrés égaux, ſur leſquels on peut enſuite placer les objets, tels qu'on s'imagine être poſées dans le plan ſur leurs quarrés reſpectifs, dont enſuite on n'a qu'à déterminer les hauteurs chacune par ſon échelle de front, qui ſe trouve toute formée ſur le tableau.

IV. Outre cela il eſt à remarquer, que comme il arrive ſouvent, que le point de diſtance ſe trouve hors du tableau, on peut néanmoins faire enſorte, que ce point ſe trouve dans le tableau même. Et voici comme on fait. Fig. 18. Soit, par exemple, la baſe du tableau AB diviſée en 4. parties égales, ſuppoſez 4. pieds, que la ligne EO repréſente le plan de la direction de la vûë ; on ſuppoſe, que la diſtance depuis le pied de l'œil juſqu'à la ligne fondamentale du tableau ſoit de ſix pieds; diviſez la partie de la baſe AE en ſix parties égales, & tirez du point P, qui ſe trouve rapproché, & perpendiculairement au deſſus du point A, à ces points de diviſions, les droites qui vous donneront ſur AO, les mêmes points C, D, E, F, &c. que ſi l'on avoit fait l'operation ſelon ce qui a été dit ci-deſſus.

V. Après ceci s'il eſt néceſſaire de trouver de moindres parties de meſure dans les échelles, ſoit de front ou fuyantes, on n'a qu'à diviſer la premiere partie AM de celles de AE, en autant de parties aliquotes que l'on cherche de parties de meſure ; & tirant de ces points des lignes droites au point d'éloignement établi ſur le côté du



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google

tableau, on trouve sur les paralleles autant de parties de mesure des échelles de front. Quant au fuyant voici comme on le trouve; soit un point à déterminer sur une parallele à la moitié ou aux $\frac{1}{4}$, &c. entre les deux EK, FL, tirez du point G, où la parallele EK rencontre le côté du tableau, la ligne GO, qui coupera les lignes PN, P*n*, &c. dans des points, desquels on tire les paralleles, qui sont à distances fuyantes, & sur lesquelles on détermine aisément les points que l'on cherche.

VI. Le grand avantage de cette métode consiste en ce que pour la pratique on n'a besoin ni de plan ni d'élevation dessinés exprès; & par conséquent lorsqu'on ne travaille que sur une simple idée, la seule imagination du Peintre suffit; outre que l'on détermine toutes les mesures perspectives du sujet, sans qu'on soit obligé de sortir hors de l'étenduë du tableau. *Fig.* 19.

CHAPITRE QUATRIEME.

Des Pratiques pour dessiner d'après nature, & des Positions du tableau autres que les Verticales, &c.

I. IL y a outre cela deux Pratiques pour dessiner les objets d'après nature. La premiere consiste à employer un cadre évidé, dans lequel on a fait un treilly de fils, distans d'environ d'un pouce les uns des autres; au bas de ce cadre il y a un bras que l'on peut avancer ou reculer dans une coulisse ou mortoise; ce bras porte à son extrémité un bâton, qu'on peut hausser ou baisser, & qui a à son bout d'enhaut une platine percée d'un petit trou,

à travers lequel on lorgne, pour voir dans quel quarré du treilly tombent telles ou telles parties de l'objet, afin de les rapporter de cette même maniere dans un treilly semblable, que l'on a tracé sur le tableau. Mais cette métode ne laisse pas que d'être un peu pénible.

II. Il y a beaucoup plus de facilité à se servir d'une chambre obscure portative, qui par le moyen d'un verre convexe, & d'un miroir plat renvoye la figure de l'objet contre un papier tendu horizontalement, sur lequel on peut trouver le trait principal de la perspective, que l'on transporte ensuite sur un autre papier en renversant, puisqu'une telle chambre obscure représente à gauche ce qui est à droite.

III. Lorsque le tableau est incliné, & qu'il s'agit de représenter un objet, qui dans un certain point de vûë se présente posé perpendiculairement, on se sert le plus commodément de la seconde métode. Soit, par exemple,
Fig. 21. le tableau incliné AD, sur lequel il s'agit de représenter une croix solide, composée de six cubes égaux, qui par rapport au point de vûë O, se présente posée perpendiculairement; ayant réglé le plan & l'élevation, je tire de tous les points qui peuvent tomber dans la vûë, des lignes droites dans le plan au point E, & dans l'élevation au
Fig. 20. point O; ensuite je forme dans le plan autant de fonda-
Fig. 21. mentales qu'il y a de points d'intersection dans le tableau incliné de l'élevation AD, en prenant les distances perpendiculaires depuis ces points jusqu'à l'objet. Après quoi je porte les intervalles A *a*, *b* B, &c. de la Fig. 21. de suite sur les deux côtés du tableau perspectif, & tirant
Fig. 22. des paralleles, je porte sur elles les distances prises sur les paralleles correspondantes du plan par rapport à chaque point, ce qui me donnera une représentation, qui sera son effet, l'œil étant posé en O.

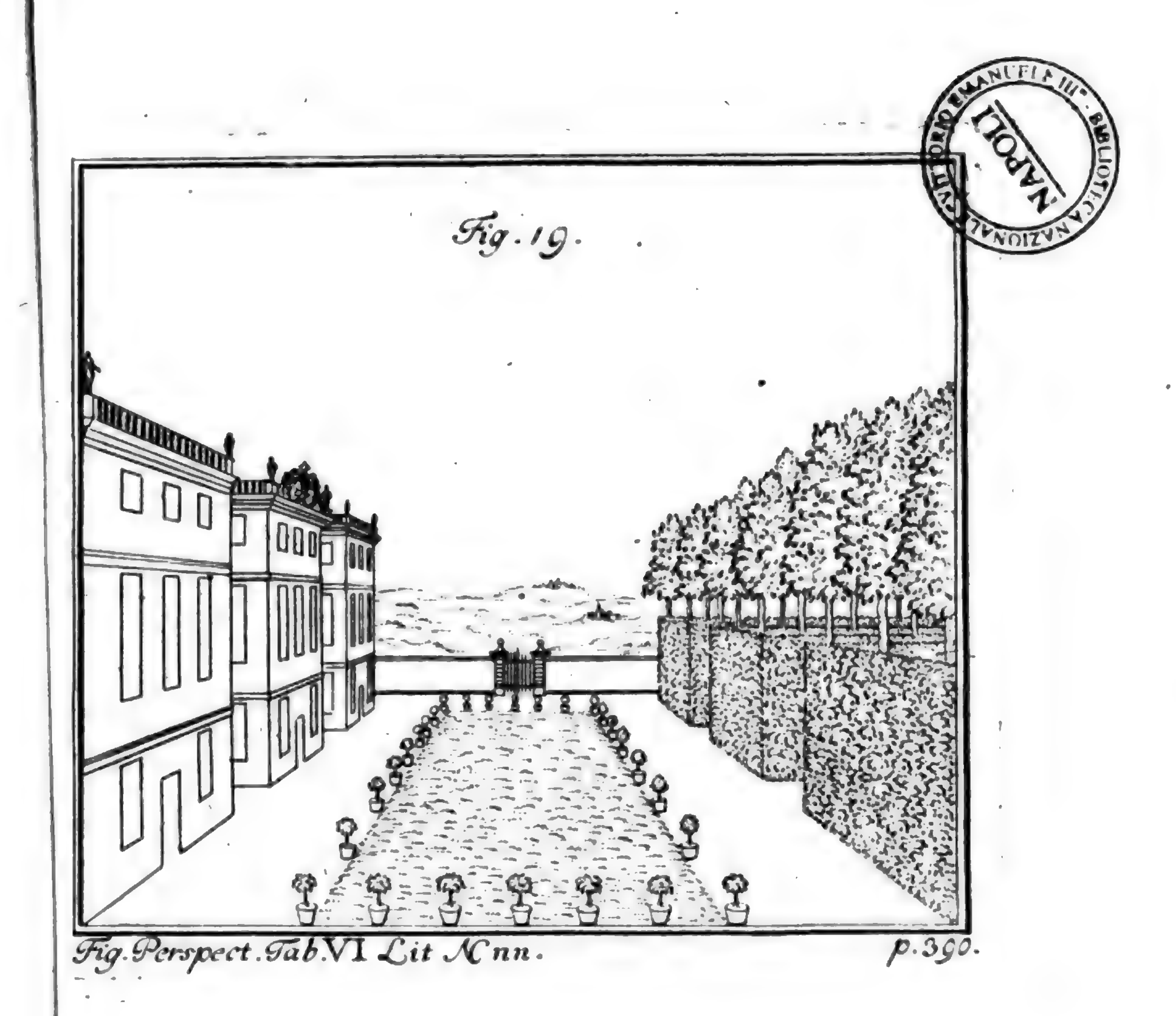


Fig. Perspect. Tab. VI Lit. Nnn. p. 390.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

IV. Si la repréſentation ſe devoit faire ſur une voûte concave cylindrique, il faudroit prendre les points où les lignes qui concourrent en O, coupent le profil de la voûte, & ſi la ſurface de devant de l'objet n'étoit point unie, comme nous avons ſuppoſé celle de la croix, il faudroit établir immédiatement devant ce corps, un tableau perpendiculaire comme AH, qui donneroit dans le plan une fondamentale principale, comme ſeroit la ligne marquée A, & pour déterminer les autres on ne prendroit que les diſtances depuis les points *a*, *b*, B, *c*, &c. juſqu'au tableau AH, ce qui eſt aiſé à concevoir. *Fig.* 21.

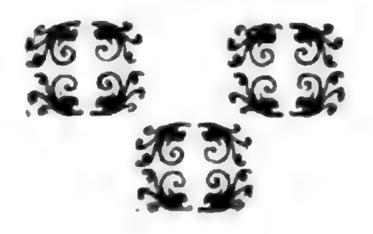
V. On met ſouvent le tableau dans une ſituation parallele à l'horizon, & alors le point de vûë étant au deſſus à une diſtance finie, la perſpective s'appelle à vûë d'Oiſeau ; mais le cas où on en a beſoin eſt rare. Il arrive bien plus ſouvent qu'à une telle poſition du tableau, l'œil ſe trouve au deſſous, & alors l'operation ne differe en rien de l'ordinaire, pourvû que l'on change l'horizontal en vertical ; & au contraire. Soit, par exemple, une piece de bâtiment, dont le ſol eſt ADE, le plafond BGHC, & le mur droit de la hauteur ſeulement AB, qui eſt celle des deux pieds droits AB, DC, entre leſquels il y a un paſſage, on veut qu'à l'œil poſé en O, il paroiſſe que ces deux pieds droits ſoient ſurmontés d'un arc en plein ceintre. Cet arc ſe préſentera ſur le plafond tel que BKC ; & on en trouvera les points, ſi on prend ſur un plan horizontal le demi-cercle, BIC avec ſes paralleles pour le plan de la baſe ; ML pour la diſtance, & LO pour la hauteur de l'œil. *Fig.* 23.

VI. Les bornes de ce traité ne nous permettent point de parler de la conſtruction des anamorphoſes d'optique, qui ſont des repréſentations difformes ſur les ſurfaces de

differens corps, ou même le long d'une surface plane ; lesquelles étant regardées d'un certain point, représentent l'objet en ordre. Nous dirons seulement, que lorsque la surface est fort irréguliere, on en vient à bout par une pratique comme celle qui suit. Soit, par exemple, la peinture d'un plafond à représenter dans une voûte d'arrêtes. Vous ferez un treilly sur la peinture, & ensuite faisant un treilly semblable avec des fisselles, tenduës à la hauteur des retombées de la voûte, vous mettez une bougie allumée au point de vûë O, & les ombres des fisselles vous marqueront dans les concavités de la voûte les contours des pans correspondans aux quarrés du treilly, dans lesquels ensuite on rapporte par une espece d'anamorphose, les parties de la peinture qui y conviennent, & qui y feront leur effet à l'œil placé en O.

Fig. 24.

VII. Cependant tout ceci, de même que l'allongement des lettres & des figures que l'on veut représenter fort haut sur un plan vertical, & que quelques-uns prétendent régler sur l'angle visuel, n'a lieu que dans des distances assez considerables ; car sans parler des differens jours qui gâtent souvent ces représentations, il est évident que la distance de nos deux yeux ayant un rapport trop sensible à la distance de l'œil au tableau, l'artifice ne pourra faire un bon effet, que pour celui qui le regarde d'un seul œil, & qui outre cela se trouve précisément dans le point requis pour cet effet.



SECONDE

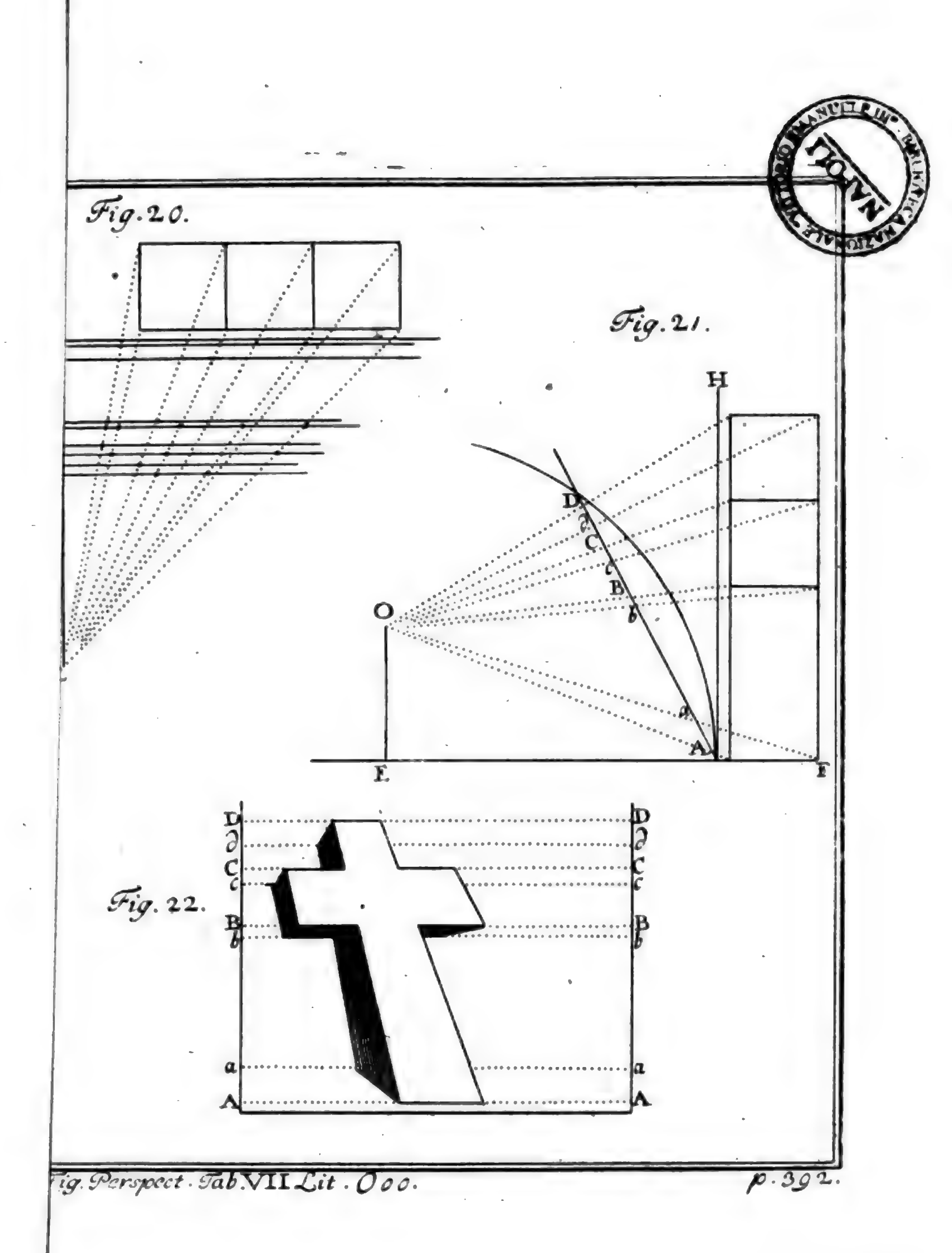
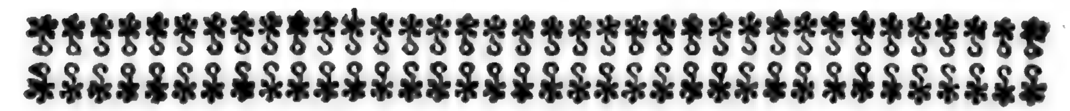


Fig. Perspect. Tab. VII Lit. Ooo.

Digitized by Google

Digitized by Google



SECONDE PARTIE.

LEs Corps, en tant qu'ils ſont opaques, jettent des ombres, lorſqu'ils ſont oppoſés à la clarté ; ainſi les ombres ne ſont qu'un deffaut de clarté ou d'illumination. Ces ombres ſont ou peu connoiſſables & peu diſtinctes, comme ſont celles qui ſe forment dans un tems couvert ; ou bien elles ſont nettes & diſtinctes, lorſqu'elles ſont cauſées par une lumiere vive. Les corps lumineux qui nous cauſent ces ſortes d'ombres ſont le Soleil, la Lune, les flambeaux. Comme il y a de la difference entre les ombres qui ſont cauſées par le ſoleil & la lune, & celles qui ſont cauſées par les flambeaux ; nous parlerons ſéparément des unes & des autres.

CHAPITRE PREMIER.

Des Ombres cauſées par le Soleil.

I. ON ſçait que le corps lumineux du Soleil eſt beaucoup plus grand que le Globe de la Terre ; ainſi l'ombre de la terre eſt un cône qui termine en pointe, de ſorte qu'en faiſant abſtraction des réfractions que les rayons du ſoleil ſouffrent dans l'atmoſphere de la terre, ce cône ombreux CDE eſt abſolument privé de toute clarté, qui vienne directement du ſoleil ; mais ſi l'on conçoit des lignes tirées des extrémités du ſoleil, telles que ADF, BCG, il eſt évident que dans les intervalles GCE, FDE, Fig. 25.

Digitized by Google

il se doit trouver un mélange d'ombre & de lumiere qui s'appelle penombre, & qui étant plus foncé du côté des lignes CE, DE, va se perdre insensiblement vers les lignes CG, DF. Cependant comme le diamétre du soleil, à cause de son grand éloignement de la terre, ne nous paroît que sous un angle d'environ un demi-degré, les angles GCE, FDE ne peuvent être chacun que d'environ un demi-degré; & par conséquent la zone de la terre Ce D*d*, qui est éclairée au-delà de la moitié du globe, est si peu de chose, que ce n'est qu'une chicane de dire, que la terre est éclairée au-delà de sa moitié par le soleil; outre cela la longueur du cône ombreux étant au-delà de 72. fois le diametre de la base ou du globe de la terre, il est évident qu'en fait de perspective on ne fait pas une faute sensible en supposant que les rayons du soleil sont paralleles entr'eux.

Fig. 26. II. Ainsi supposant le soleil dans le plan du tableau, si on veut déterminer l'ombre que jette le prisme AFED sur le plan horizontal, on n'a qu'à tirer par les points ABC des lignes paralleles entr'elles, & qui soient inclinées à la base, sous un angle égal à la hauteur supposée du soleil, & qui en rencontrent d'autres qui sont paralleles à la ligne fondamentale, & qui passent par les points D, E, F, qui sont dans le plan à plomb sous A, B, C, & les intersections G, H, I, donneront les extrémités de l'ombre cherchée Si le prisme est incliné, il faut encore chercher les points des à plomb sur le plan. On cherche le reste comme on voit par la figure.

III. Mais lorsque le soleil est supposé en deçà ou au-delà du plan du tableau, il faut régler les points de l'ombre dans l'élevation & dans le plan, de la maniere suivante. Soit l'objet à représenter une piramide quadran-

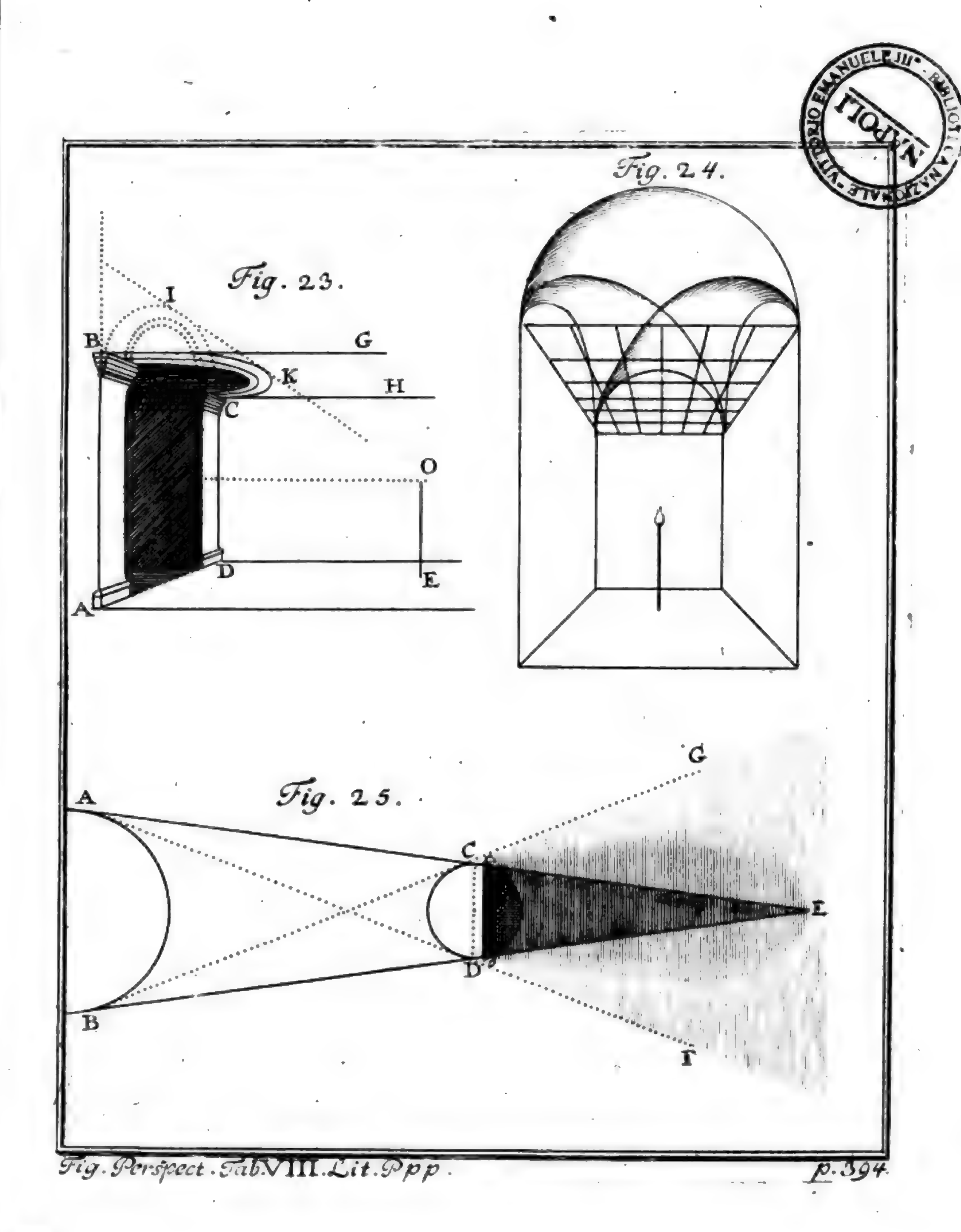


Fig. Perspect. Tab. VIII. Lit. Ppp.

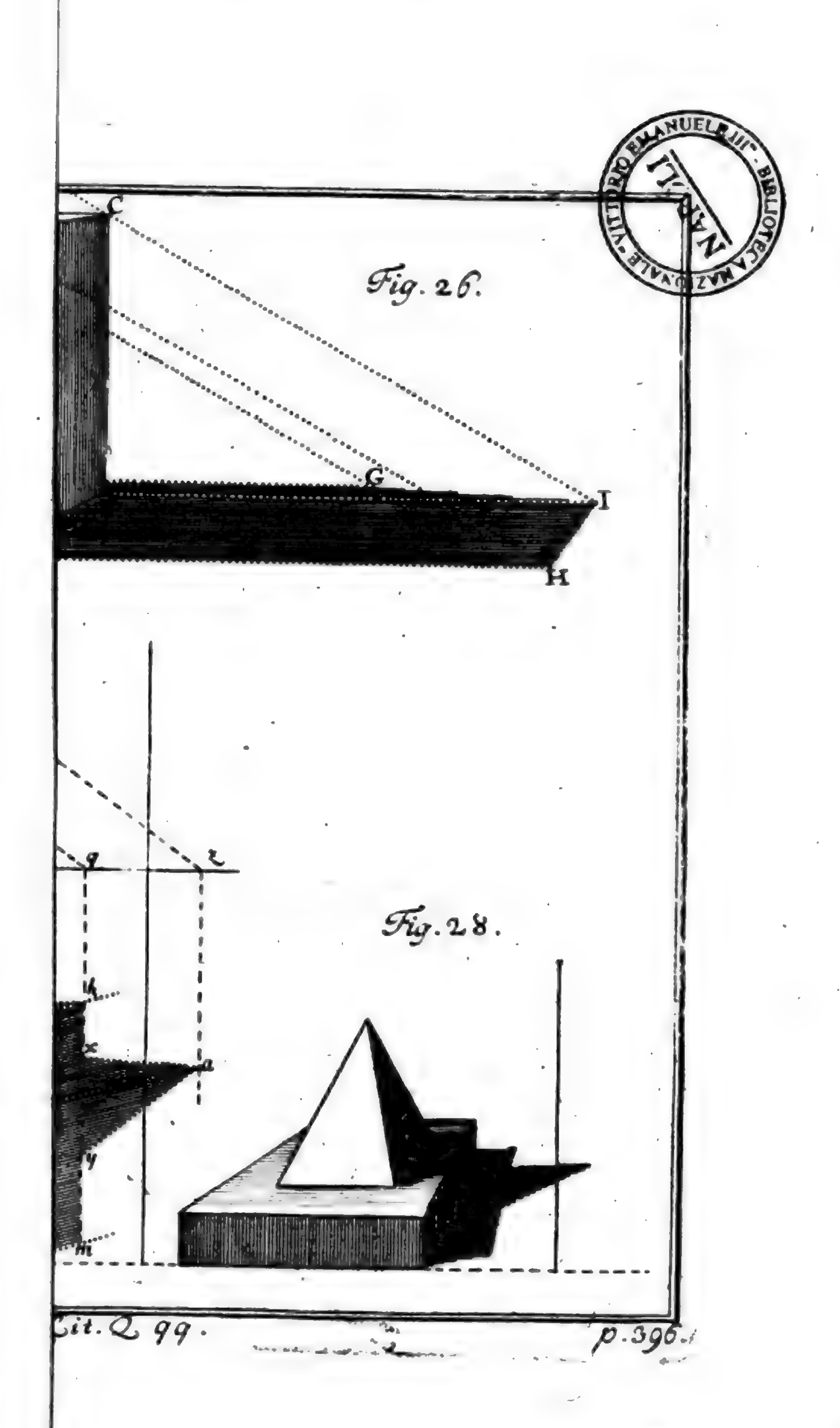
VITT. EMANUELE III. BIBLIOT. NAZIONALE NAPOLI

gulaire ABC posée sur un socle, ou plinthe quarré DE*ed*, dont la hauteur est DG ou EF; ayant formé directement au dessus du plan l'élevation conformément à la maniere dont le plan se présente, on suppose que le soleil par rapport au plan se trouve dans la direction des lignes paralleles *dk*, *f*A*a*, & que par rapport à l'élevation, il se trouve dans la direction de ces autres paralleles *r s*, *pq*, *nz*; ainsi tirant des points de la base *s*, *q*, *z*, où aboutissent les ombres des points D, E, A, les aplomb *sk qm*, *za*, ces lignes déterminent les longueurs des ombres sur la base ou sur le plan d'enbas. Ainsi il ne s'agit plus que de chercher dans la perspective dessus la ligne fondamentale, la situation des points D, E, *e*, qui sont ceux du côté GF, & son opposé, & ceux de l'ombre, qui sont *m*, *y*, *a*, *x*, *h*, *k*, ensuite vous cherchez dessus une parallele, qui est distante de la premiere de la hauteur DG ou EF, encore les points du socle DE*e*, de même que les trois BC*c* du pied de la piramide. Enfin cherchant sur une nouvelle parallele le point A du sommet, on aura non seulement les points du corps, mais aussi ceux de l'ombre, qu'il n'y aura plus de difficulté de joindre. Fig. 27. Fig. 28.

IV. Il arrive souvent que les ombres ne s'étendent pas lelong du plan de la base, & qu'au contraire elles se jettent sur des corps qui s'y trouvent posés. C'est ce qui fait qu'elles deviennent brisées. Soit, par exemple, un cilindre posé perpendiculairement sur un plan, au bout duquel se trouvent quelques marches, qui sont contre un mur vertical; on suppose le soleil dans le plan du tableau, à une hauteur telle que l'ombre du cilindre tombe sur les marches, & même contre la partie du mur, qui est au dessus; après avoir réglé le plan & l'élevation, comme Fig 29.

on voit à la figure ; on cherche les points du ſujet à l'ordinaire, enſuite on cherche les points néceſſaires de l'ombre du ſomet du cilindre, qui tombe contre le mur, qui donnera une eſpece d'ellipſe, & ayant fait tomber de ſes deux points extrémes des perpendiculaires, qui rencontrent la premiere marche d'enhaut, on tire de-là deux paralleles à la baſe, d'où enſuite on fait tomber deux perpendiculaires le long de la hauteur de la marche, & ainſi de ſuite. Si dans ce cas le ſoleil n'étoit point dans le plan du tableau, il faudroit chercher ſur chaque marche les points où l'ombre paſſe.

V. Si on ſe ſert de la troiſiéme métode, & que le ſoleil ſoit dans le plan du tableau, on détermine les ombres moyennant les échelles de chaque point de l'objet, ce qui eſt aiſé à concevoir. Si le ſoleil eſt perpendiculaire au plan du tableau, & qu'ainſi il eſt directement ou derriere l'œil ou devant ; c'eſt ſur les échelles fuyantes que l'on détermine les ombres ; mais ſi le ſoleil eſt ſuppoſé dans une ſituation moyenne en-deçà ou au-delà du tableau, il faut régler, par le moyen de l'élevation ſur le treilly du plan, les points des ombres, que l'on rapporte enſuite dans le perſpectif en cherchant ces points dans
Fig. 30. le treilly perſpectif aux careaux correſpondans. Soit le parallelipipede ABCE, dont l'ombre jettée obliquement dans le plan termine aux points GHI ; il n'eſt pas difficile de trouver ces points dans le treilly perſpectif, & les droites SIHGB donneroient le contour de l'ombre ; mais nous avons ſuppoſé de plus, qu'il ſe trouve en chemin un cilindre KM, ſur lequel cette ombre paſſe obliquement ; ainſi pour déterminer la partie ombragée de ce cilindre, élevez ſur les points OPRQ, dans le treilly perſpectif, des perpendiculaires dont vous déterminerez les



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III · NAPOLI

Lit. Q 99.

hau
cun
mir
par
éte
du
est
lar
tic
de
d'
bi

q
d
r

hauteurs, qui sont égales au diametre du cilindre, chacune par son échelle de front, & ayant joint leurs extrémités vous aurez en haut un quadrilatere, qui seroit la partie ombragée de ce corps, si au lieu d'un cilindre il étoit un parallelipipede dont la base seroit égale au quarré du diametre de la base du cilindre. Mais puisque le corps est un cilindre, vous n'avez qu'à arrondir dans le quadrilatere vertical sur PR, de même que dans celui qui est vertical à OQ, ensorte que cet arrondissement touche au milieu de chaque côté du quadrilatere, & vous aurez deux parties d'especes d'ellipse, entre lesquelles est compris l'ombrage du cilindre causé par le parallelipipede ABCE.

VI. Outre ceci il faut remarquer, que ces ombres, quoique coupées, ne se marquent seulement qu'au trait du pinceau sans qu'on tire de ligne, d'autant plus qu'à mesure qu'elles s'éloignent de l'objet, moins sont-elles tranchées à cause de la penombre, qui est causée par la largeur apparente du soleil. De plus on remarque encore que les rayons visuels passant à travers l'air, ils perdent, à cause de sa densité & du mélange des parcelles héterogones qui s'y trouvent, une partie de leur éclat; de sorte qu'à mesure qu'un objet est plus éloigné du tableau, ou ce qui revient au même de l'œil, moins ses parties illuminées paroissent-elles éclairées, & moins aussi les ombres paroissent-elles fortes ou chargées, & c'est ce qui fait la difference entre les couches ou teintes foibles & fortes, qu'il faut observer, sur-tout quand on travaille sur un sujet, où la difference des distances est fort notable, comme aux paysages, ou à des grands bâtimens, &c. Enfin il faut encore observer, que les parties éclairées d'un corps le sont pourtant plus ou moins, suivant qu'elles sont frappées plus ou moins directement par les rayons

du ſoleil. Quelque teinte legere d'ombre en marque les differences. Nous ne marquons rien des diminutions d'ombre, cauſées par les reflexions de la lumiere, pour éviter un trop grand détail.

VII. Quant aux ombres cauſées par la lune, il eſt vrai que le diametre de la lune n'eſt qu'environ un quart de celui de la terre ; mais puiſqu'en échange elle n'eſt éloignée de nous que d'environ 30 fois le diamétre de la terre, elle paroît à peu près auſſi grande que le ſoleil; ainſi on peut encore ſans erreur prendre ſes rayons pour paralleles entr'eux; par conſéquent les loix de la perſpective ſont par rapport à eux, les mêmes que nous venons de donner pour ceux du ſoleil ; mais comme d'ailleurs ſa lumiere eſt fort foible, c'eſt aux Peintres à ſe régler là-deſſus pour les ombres, les coloris & les lointains.

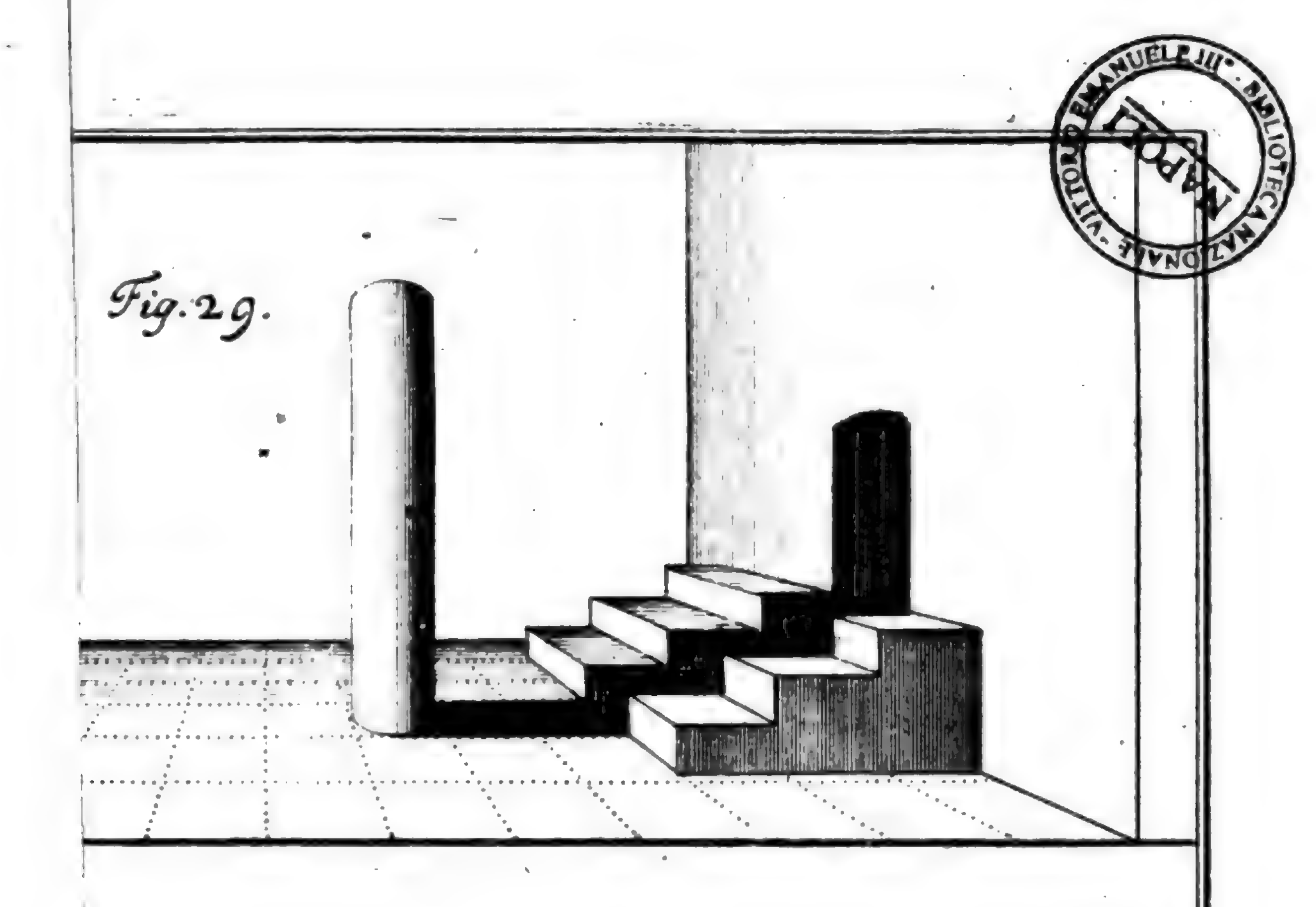
CHAPITRE SECOND.

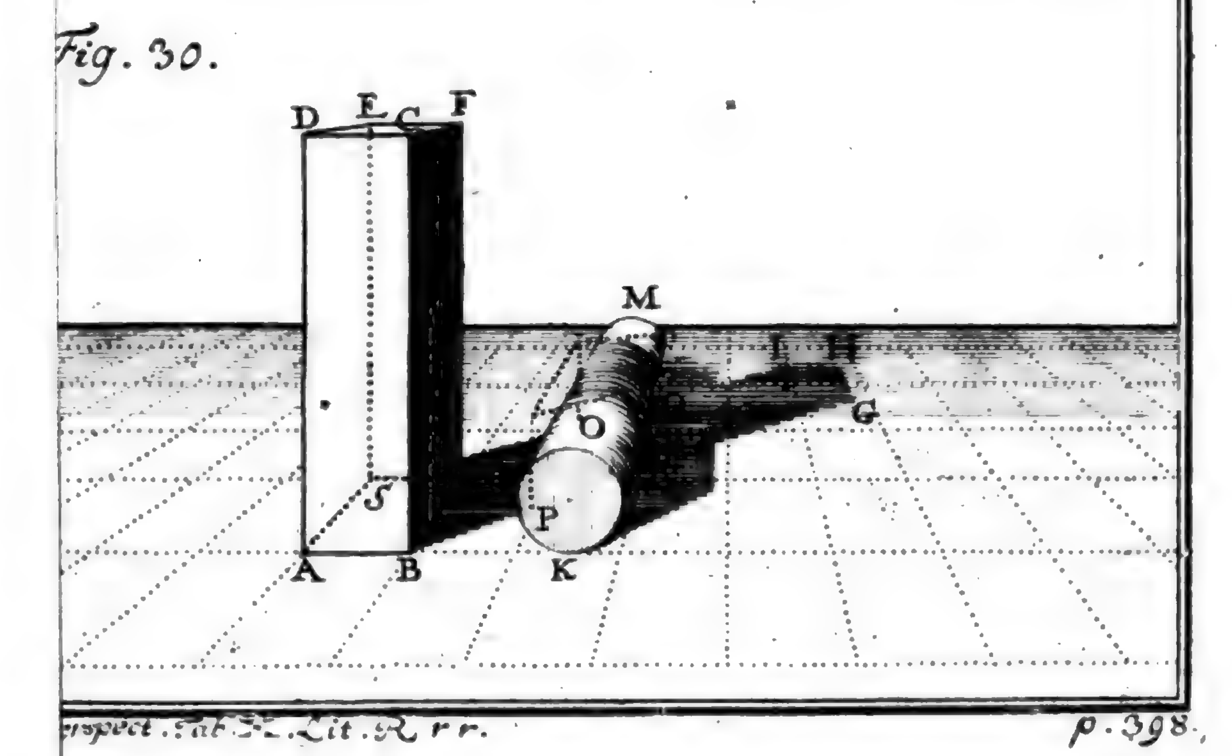
Des Ombres cauſées par les Flambeaux.

I. LEs autres luminaires que nous appellons en géneral des flambeaux, ne ſont cenſés être que des points lumineux dont les rayons vont en s'écartant de tout côté. C'eſt à quoi il faut faire attention, comme nous allons voir dans les exemples ſuivans.

Fig. 31. II. Soit un luminaire A poſé ſur un cube tel que BD, qui jette l'ombre de ce cube à l'entour, enſorte qu'elle ſoit bornée par la ſurface de la baſe par les points KL*lk*; ayant fait dans le plan le quarré BCDE, qui repréſente la ſurface ſupérieure du cube, & y étably le point A, vous tirez de ce point par les angles du quarré des droites indéterminées, & ayant fait au deſſus de ce plan l'élevation

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI





…spect. Tab. [illegible]. Lit. Rrr. p. 398.

correspondante, B*bc*C est celle du cube, le point A celle du luminaire ; les lignes que vous tirez de ce point A par B & C, détermineront sur la base les points *K*, *L*, dont vous abaisserez des perpendiculaires, qui vous détermineront dans le plan les points *k*, K, L, *l*. Après quoi ayant établi la ligne FG, pour la direction de la vûë, le reste s'acheve comme à l'ordinaire. Fig. 32.

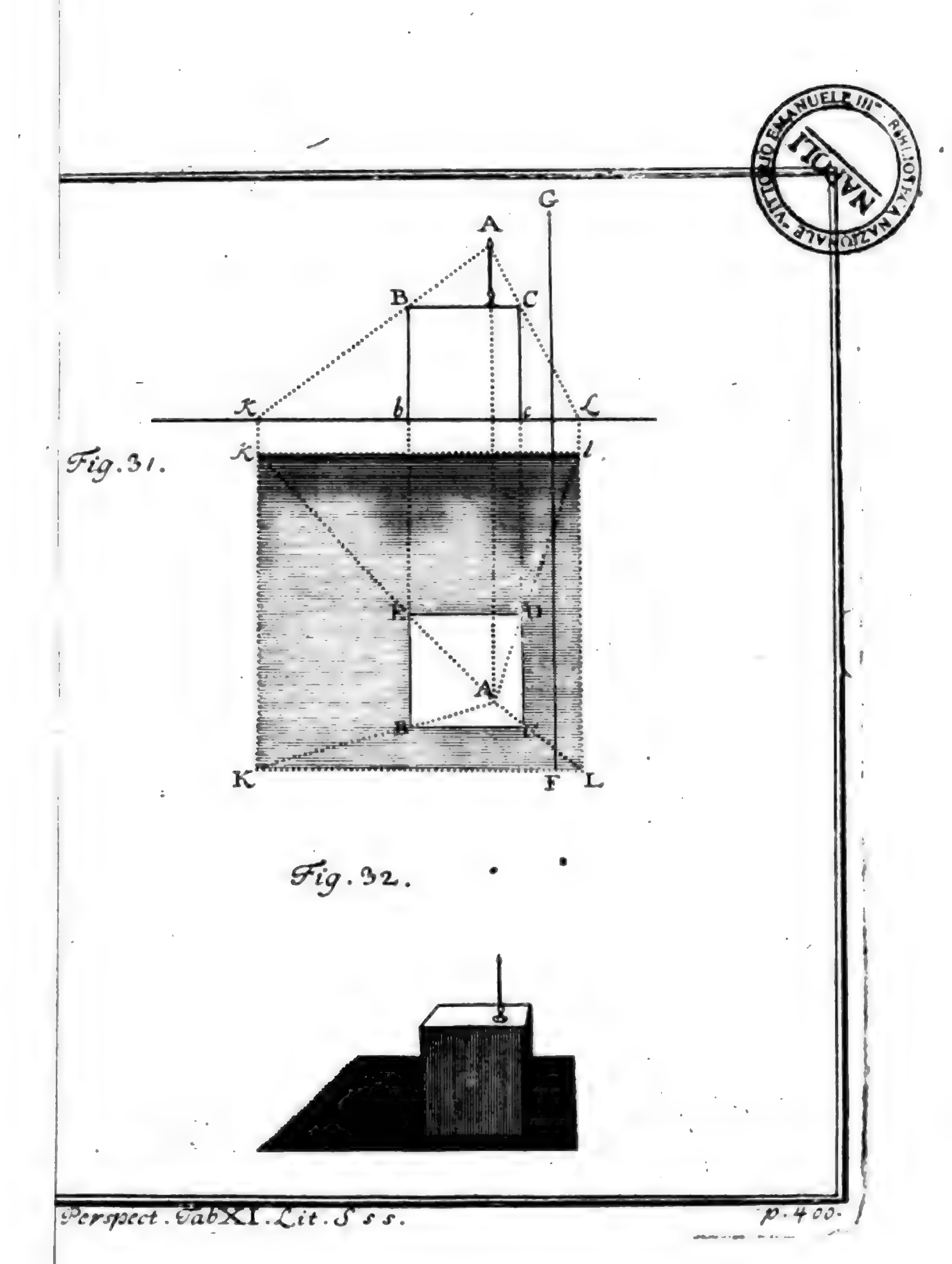
III. Dans le second exemple nous avons supposé un luminaire posé sur un parallelipipede, contre un des côtés d'une chambre, au milieu de laquelle se trouve un cilindre posé par terre, & de l'autre côté une table. Le plan & l'élevation étant réglés, tant par la position des corps, que par rapport à la projection de leurs ombres, comme on voit par la figure, la représentation se fait selon les régles ordinaires. Fig. 33. & 34.

IV. Dans ces sortes de représentations il faut remarquer, que l'effet de l'illumination, qui est causée par les flambeaux, y est fort sensible. Sa loy génerale est, que les objets sont éclairés en raison doublée réciproque de leurs distances au luminaire. A quoi se joint encore l'incidence plus ou moins directe des rayons, &c. C'est ce qui fait que ce qui est près du luminaire est vif & clair, pendant que le reste va se perdre petit à petit dans l'obscurité, & c'est en quoi consiste la beauté de ces sortes de nuits.

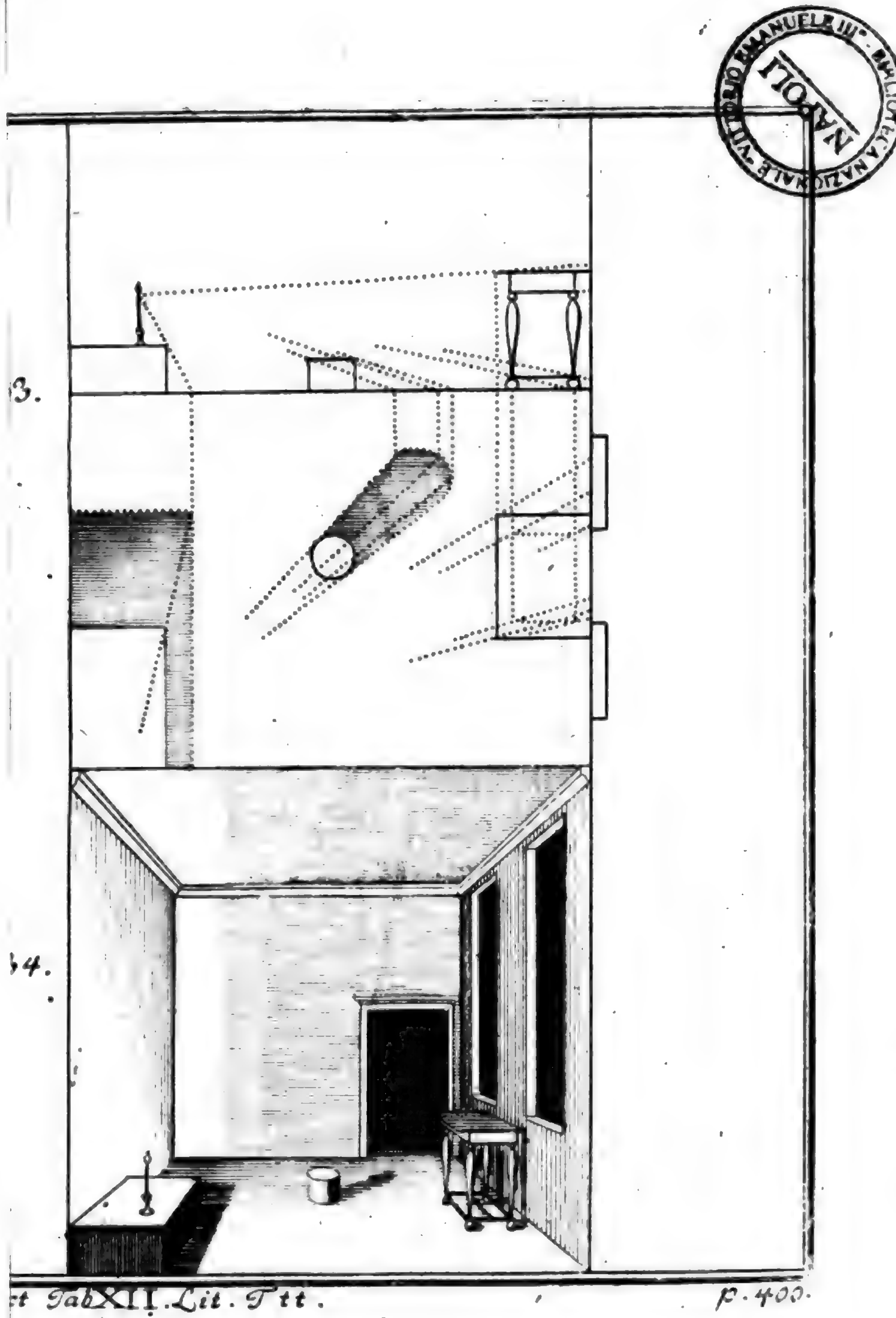
V. Le troisiéme exemple propose un équerre percé à jour, & exposé verticalement sur un plan horizontal. Il est supposé éclairé par trois flambeaux posés çà & là à differentes distances. La construction du plan & de l'élevation y donnent aisément les bornes des ombres ; mais quant à leurs forces elles sont differentes à cause des distances des flambeaux, outre cela elles se trouvent encore Fig. 35.

diminuées par le rayonnement des flambeaux, dont les uns donnent là où quelque autre jette de l'ombre ; nous n'en donnons point de régles, parce que pour peu que l'on ſçache ombrer, il eſt fort aiſé de ſuivre en cela le ſpectacle, que l'experience peut fournir facilement.

FIN DE LA PERSPECTIVE.



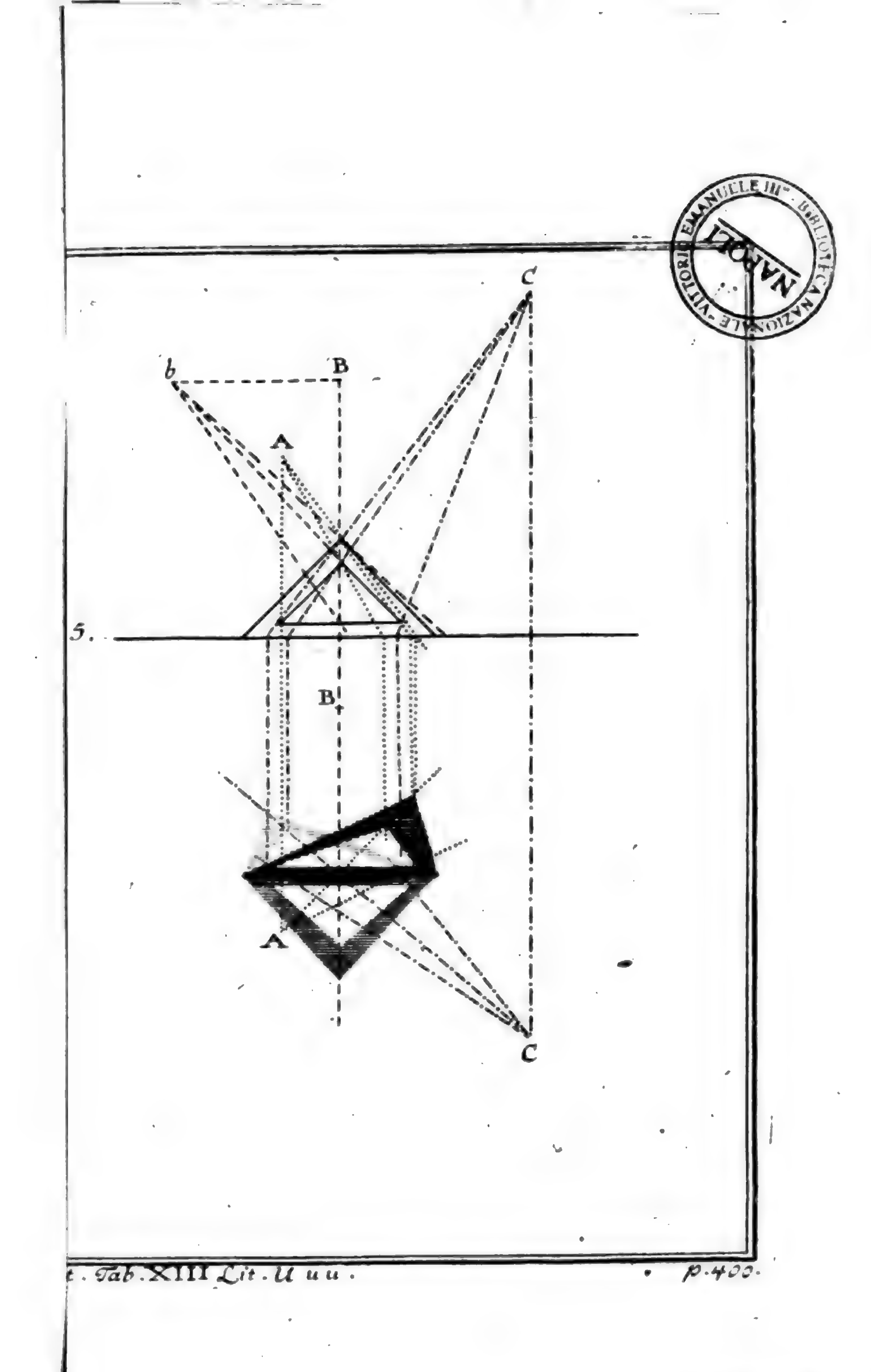
VITTORIO EMANUELE III BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI



t Tab. XII. Lit. Ttt. p. 400.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III · NAPOLI

Digitized by Google

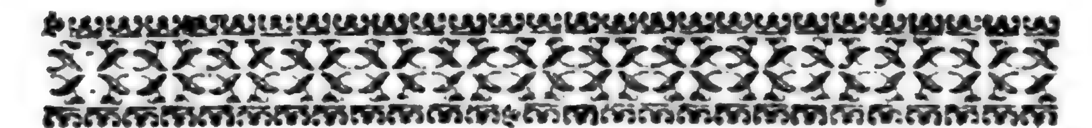


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III · NAPOLI

t. Tab. XIII Lit. U u u. p. 400.

COSMOGRAPHIE.

Digitized by Google



COSMOGRAPHIE.

SECTION PREMIERE.

De l'Univers & de ſon Syſtême.

CHAPITRE PREMIER.

De la Sphere & de ſes Cercles.

I.

LES apparences du lever & du coucher du Soleil, de la Lune & des autres Aſtres ont fait conclure que le Ciel eſt un globe concave, qui ſemble tourner à l'entour de ſon Axe dans le tems de 24. heures; & dans lequel la Terre tient lieu du centre. Cet Axe aboutit à deux points qui paroiſſent immobiles, & que l'on appelle les Poles; dont l'un eſt le Pole Arctique ou Septentrional, & l'autre l'Antarctique ou Méridional.

II Pour déterminer les Phénomenes de ce mouvement on s'eſt figuré des Cercles, dont les uns ſont appellés grands Cercles, qui partagent l'Univers en deux parties égales; & les autres ſont appellés petits Cercles; parcequ'ils partagent l'Univers en deux parties inégales.

III Le premier de ces Cercles eſt l'Horizon, qui ſépare la partie du Ciel qui eſt en haut & que nous voyons, d'avec celle qui eſt deſſous & que nous ne voyons point. Cet Horizon eſt ou le vrai ou le ſenſible.

IV. Le Méridien est un grand Cercle, qui passe par le Pole & notre point vertical, appellé Zenith; d'où il passe droit par l'autre Pole, & le point opposé au Zenith, que l'on appelle Nadir. Ce Cercle coupe l'Horizon à angles droits. Il est appellé Meridien, parce qu'il est midi, lorsque le Soleil y paroît Ces deux Cercles sont changeans, suivant que nous nous trouvons en differens endroits sur la terre. Moyennant ces deux cercles il est aisé de connoître les quatres Plages principales, qui sont l'Orient, l'Occident, le Septentrion, & le Midi; que l'on appelle l'Est, l'Oüest, le Nord & le Sud. Les Collaterales tirent leur nom de celles-ici; & on en compte ordinairement par une bisection continuelle jusqu'à 32.

V. L'Equateur est un grand Cercle, qui est de tout côté également éloigné des deux Poles. Ainsi il passe toujours par les deux points Cardinaux de l'Orient & de l'Occident; & dans le Meridien il est autant éloigné du Zenith que le Pole est élevé dessus l'horizon. On lui a donné le nom d'Equateur, parce que le Soleil y étant tous les habitans de la terre ont la nuit égale au jour.

VI. On a observé que non seulement le Soleil change tous les jours de hauteur meridienne, ensorte qu'une partie de l'année il est en-deça de l'Equateur, & l'autre partie au-delà; mais qu'en même tems il semble aussi s'avancer successivement aux étoiles, qui sont vers l'Orient. Par conséquent il y paroît deux mouvemens contraires; l'un qui est le premier ou le commun, qui traine tous les corps céléstes en 24. heures d'Orient en Occident; & l'autre qui est le second ou particulier, selon lequel les corps céléstes tendent petit-à-petit d'Occident en Orient. Et puisque les autres Planètes suivent à-peu près cette même route en plus ou moins de tems; on a formé un grand

Digitized by Google

Cercle, que l'on nomme Ecliptique, qui coupe l'Equateur en deux points sous un angle de $23^{\circ}\ 29'$, qui est le plus grand éloignement ou la plus grande déclinaison du Soleil d'avec l'Equateur. Mais parce que les autres Planètes ne suivent pas précisement cette même route ; on prend des deux côtés de l'Ecliptique une largeur de dix degrés, & alors cette bande contient la route de toutes les Planetes. On l'appelle Zodiaque à cause des configurations, qu'on a donné aux étoiles, qui sont en cette route, & dont la plûpart réprésentent des animaux. Ces configurations sont au nombre de douze, & on les appelle communément les douze Signes. Les voici avec leurs noms :

♈ le Belier,	♎ la Balance,
♉ le Taureau,	♏ le Scorpion,
♊ les Gemaux,	♐ le Sagittaire,
♋ Cancer ou Ecrevisse,	♑ le Capricorne,
♌ le Lion,	♒ le Verseau,
♍ la Vierge,	♓ les Poissons.

C'est par rapport à ces douze figures que l'on a partagé l'Ecliptique ou le Zodiaque en douze parties égales chacune de 30°. On commence à les compter de l'Occident vers l'Orient, depuis l'intersection de l'Equateur & de l'Ecliptique dans sa partie, qui monte vers nous. Ainsi les six prémiers sont Septentrionaux, & les six autres Méridionaux & chaque quart de l'Ecliptique contient trois Signes que l'on nomme selon la saison que nous avons lorsque le Soleil y est. Ainsi les Signes du Printems sont ♈, ♉, ♊, ceux de l'Eté ♋, ♌, ♍, ceux de l'Automne ♎, ♏, ♐, ceux de l'Hyver ♑, ♒, ♓. Le mouvement lent que l'on a découvert dans les étoiles fixes, ou plûtôt la précession des équinoxes causée par

le changement successif de l'inclinaison de l'axe de la Terre, fait que les figures des Signes ne repondent plus aux parties de l'Ecliptique, qui en ont leurs noms.

VII. Si par les deux points de la plus grande déclinaison du Soleil, c'est-à dire, à 23° ½ de distance de l'Equateur de part & d'autre on décrit deux Cercles paralleles audit Equateur, ce seront les Tropiques; parce que le Soleil parvenant à ces Cercles-là s'en retourne. Celui qui est vers le Pole Arctique, est le Tropique du Cancer, & celui qui est vers le Pole Antarctique s'appelle le Tropique du Capricorne.

VIII. Si à l'intervalle de 23° ½ de chaque Pole on décrit deux petits Cercles, qui passent chacun par un des Poles de l'Ecliptique; cesCercles sont appellés les Polaires; dont l'un est l'Arctique & l'autre l'Antarctique. Pour l'usage de l'Astronomie on pourroit décrire les Cercles Polaires par les points de l'intersection du Méridien & de l Horizon. Ainsi ces Cercles seroient changeans; l'un d'eux contiendroit les étoiles, qui ne se couchent point, & l'autre celles qui ne paroissent jamais sur l'horizon de tel ou tel endroit.

IX. Enfin si par les 4. points principaux de l'Ecliptique, qui sont ses deux intersections avec l'Equateur, c'est-à-dire, o♈, & o♎ & les deux points des deux plus grandes déclinaisons du Soleil, qui sont o♋, & o♑, on tire deux grands cercles, qui se coupent à angles droits dans les deux Poles de l'Univers; ce seront ceux que l'on nomme Colures Le premier est celui des Equinoxes, & l'autre est celui des Solstices.

X Outre ces dix Cercles, dont les Spheres Armillaires sont ordinairement composées, on y en peut encore imaginer d'autres; comme sont les Cercles de Longitude &

de Latitude; les Cercles Verticaux & ceux de Hauteur, les Cercles de distance, & ceux de Position.

XI. La Longitude & la Latitude ont des significations differentes dans l'Astronomie & dans la Geographie. dans l'Astronomie ces mots se rapportent à l'Ecliptique. Ainsi concevant une infinité de grands Cercles, qui passent tous par les deux Poles de l'Ecliptique, & qui la coupent dans tous ses points à angles droits, ces Cercles sont appellés Cercles de Longitude. Ainsi pour connoître la Longitude d'une étoile on compte les degrés de l'Ecliptique depuis o♈, ou l'intersection Vernale jusqu'au point où le Cercle de Longitude, qui passe par cette étoile, coupe l'Ecliptique; & si on compte les degrés du Cercle de Longitude depuis l'Ecliptique jusqu'à l'étoile en question, on aura sa Latitude. Par conséquent si on conçoit une infinité de Cercles, qui sont paralleles à l'Ecliptique, & qui vont en diminuant jusqu'à l'un & l'autre de ses Poles; ces Cercles sont appellés Cercles de Latitude. Le mouvement lent qui paroît aux étoiles fixes, se fait selon la Longitude, leur Latitude demeurant toujours la même.

XII. La Longitude & la Latitude en Géographie se rapportent à l'Equateur. Ainsi les Cercles de Longitude passent par les Poles de l'Univers & sont perpendiculaires à l'Equateur; par consequent ce sont autant de Meridiens. Les degrés d'un tel Cercle de Longitude compris entre l'Equateur & le lieu donné sont la Latitude; cette Latitude est toujours égale à l'élevation polaire Ce que l'on appelle Latitude en Géographie s'appelle Déclinaison dans l'Astronomie. La Longitude est l'Arc de l'Equateur, qui est compris entre le premier Méridien, & le Méridien du lieu proposé. Ce premier Méridien est arbitraire. On le fait passer par le Pic de l'Isle de Teneriffa, Les Géogra-

phes François le font passer par l'Isle de Fer, la plus Occidentale de Canaries. Le Méridien qui passe par l'Observatoire Royal de Paris, sert pour y repporter les Méridiens de tous les autres endroits, où on fait des Observations, qui servent à perfectionner la Géographie; il est distant de celui de l'isle de Fer de 19°, 51′, 33″.

XIII. Les Cercles Verticaux sont des grands Cercles qui passent par les deux points du Zenith & du Nadir, & qui coupent l'Horizon à angles droits. Le premier Vertical passe par les points cardinaux de l'Orient & de l'Occident. Les autres sons déterminés par un arc de l'horizon, dont on compte les degrés depuis l'intersection la plus proche du Méridien & de l'Horizon; cet Arc s'appelle Azimuth. & si on conçoit des Cercles paralleles à l'Horizon, qui didiminuent toujours jusques vers le Zenith, on les appelle Cercles de hauteur ou Almucantarath.

XIV. Un Cercle de distance est tout grand Cercle que l'on conçoit tiré par deux points donnés du Globe, & dont l'Arc compris entre les deux points donne leur distance.

XV. Les Cercles de Position sont 6 grands Cercles, qui passent par l'intersection de l'horizon & du meridien, & qui divisent l'équateur, ou selon d'autres le premier Vertical en douze parties égales. Ainsi l'Horizon & le Méridien sont de ce nombre. Ils ne servent proprement qu'à la vanité des Astrologues, qui en forment le Theme ou la répartition des 12 maisons célestes.

CHAP-

CHAPITRE SECOND.

Des apparences du mouvement Céleste en general.

LES differentes situations des endroits sur le Globe de la Terre font paroître à ses habitans le mouvement du Ciel en differentes manieres. C'est ce que l'on fait voir par les positions de la Sphere. Suivant ces positions la Sphere est ou droite ou oblique ou parallele. La Sphere droite est celle ou l'Equateur coupe l'Horizon à angles droits. Cette position paroît à ceux qui demeurent sous la Ligne, c'est à dire, sous l'Equateur; & puisque les Poles de l'Univers sont sur leur Horizon, ils voient toutes les étoiles du Ciel; de plus ils ont toujours la moitié du tems le Soleil & les autres Astres dessus l'Horizon. La sphere parallele est celle où l'Equateur & l'Horizon ne font qu'un même Cercle. Cette position ne pourroit proprement convenir qu'à ceux, qui seroient sous l'un ou l'autre Pole. Ils n'y verroient que la moitié des astres, qui tourneroient toujours à l'entour d'eux; & le Soleil leur paroîtroit continuellement pendant les 6. mois, qu'il seroit dans leur hemisphere. Toute autre situation s'appelle Sphere oblique. Dans cette Sphere oblique il y a des Etoiles qui paroissent toujours; d'autres qui ne paroissent jamais; & d'autres qui se levent & qui se couchent tous les jours.

II Par rapport à l'Horizon on dit qu'une Etoile ou tel autre point du Ciel se leve, lorsqu'il commence à paroître sur la partie Orientale de l'Horizon, & on appelle son coucher, lorsqu'il descend par la partie Occidentale dudit Horizon. Si depuis les points cardinaux du lever

& du coucher on compte sur l'Horixon les degrés, qui sont compris entre ledit point Cardinal & l'Etoile ou le point en question ; cet Arc d'Horizon s'appelle Amplitude orientale ou occidentale. L'Ascension ou la Descension est le degré de l'Equateur, qui est en même tems avec une étoile ou point du Ciel dans l'Horizon. Lorque la Sphere est droite, ce même degré passe aussi avec ledit point par le Méridien ; & c'est là ce qu'on appelle Ascension ou Descension droite. L'autre s'appelle oblique. Car dans la Sphere oblique le même point, lorsqu'il décline de l'Equateur, passe avec un autre degré de l'Equateur par l'Horizon oriental, & avec un autre par l'Horizon occidental; la moitié de cette difference s'appelle la Difference Ascensionelle ou Descensionelle ; l'Ascension droite tient le milieu entre ces deux extrémes.

III. Lorsque l'on compare un Arc de l'Ecliptique, par exemple, un Signe avec l'Arc de l'Equateur qui passe en même tems avec lui par l'Horizon ; on trouve qu'avec quelques-uns de ces Signes il passe plus de 30.° de l'Equateur, & avec d'autres il y en passe moins. L'ascension des premiers s'appelle longue, & l'autre s'appelle courte.

IV. Les Poëtes ont donné quelquefois d'autres significations aux mots du lever & du coucher. On les appelle Acronycte, Cosmique & Héliaque. Le lever ou le coucher Acronycte est celui, qui se fait à l'entrée de la nuit. Le lever ou le coucher Cosmique est celui, qui se fait à l'entrée du jour. Ainsi le lever Acronycte d'une étoile est suivi de son coucher Cosmique & au contraire. Le coucher Heliaque d'une étoile se fait lorsque le Soleil s'en approche & la fait disparoître ; & le lever Heliaque est, lorsque le Soleil ayant passé cette étoile, elle recommence à paroître. Ce coucher des étoiles se remarque vers l'Occident, & le lever vers l'Orient. La Lune, Vé-

Digitized by Google

nus & Mercure y font des exceptions, dont la raison paroîtra dans la suite.

V. Par rapport au Méridien la Culmination ou Médiation du Ciel s'appelle, lorsqu'un point du Ciel se trouve précisement au Méridien. L'Elongation du Méridien se mesure par un Arc de l'Equateur qui est compris entre le Méridien & un grand Cercle, qui passe par le point proposé & par les Poles de l'Univers.

VI. Les apparences du mouvement céleste nous servent à mésurer le tems. Ce tems est ou celui du premier mobile ou le solaire. Selon le tems du premier mobile on compte qu'une étoile ou autre point fixe du firmament, qui part, par exemple, du Méridien y revient précisément en 24. heures de tems. Ainsi 15° de l'Equateur font justement une heure de tems du premier mobile; le reste est aisé à calculer. Mais puisque le Soleil dans une révolution diurne fait selon son mouvement moyen 59′ 8″ 20‴. à-peu-près de l'Occident vers l'Orient; il est évident, qu'il faut un peu plus de tems pour que le Soleil revienne au Méridien qu'un point du firmament. Ainsi le tour du Soleil étant pris pour 24. heures, on trouvera que pendant une heure solaire il passe par le Méridien 15°. 2′ 28″. &c. de l'Equateur. C'est sur ces principes que l'on a dressé deux tables, la premiere pour la conversion des parties de l'Equateur en tems du premier mobile & au contraire, & la seconde pour la conversion des parties de l'Equateur en tems Solaire & au contraire.

VII. On remarque que l'Aurore ou l'Aube du jour commence à paroître assez long-tems avant que le Soleil arrive à l'Horizon & que de même après son coucher sa clareté paroît encore pendant quelque tems. Les observations ont fait voir que le Soleil doit avoir 18° de profondeur, à

Digitized by Google

compter depuis l'Horizon vers le Nadir, afin que l'on puisse distinguer jusqu'aux moindres étoiles. Ainsi le tems de cet intervalle de lumiere & d'obscurité est plus ou moins grand selon les differens endroits de l'Ecliptique où le Soleil se trouve.

VIII. Lorsqu'on observe la hauteur des Astres, on doit remarquer que le rayon de toute Etoile tombant dans l'Atmosphere, qui est un objet plus dense que la matiere éthereenne y souffre une réfraction vers la perpendiculaire; par conséquent cette étoile paroît à notre œil plus haute qu'elle n'est. La plus grande réfraction est sur l'Horizon, & on l'a déterminé de 32'. les autres décroissent successivement jusqu'à ce qu'elles s'évanoüissent entierement au Zenith. On a fait pour cet effet une Table, qui nous montre ce qu'il faut ôter d'une hauteur observée pour avoir la hauteur véritable.

IX. Le vrai lieu d'un astre ou de quelqu'autre objet, qui est entre le firmament & la terre, se détermine par une ligne droite, qui partant du centre de la Terre passe par le centre de l'Astre ou de l'objet, & aboutit au firmament; mais le lieu apparent d'un Astre se détermine par une ligne droite, qui partant de la surface de la Terre passe par le centre de cet Astre, & aboutit au firmament. L'Arc de Cercle, que ces deux lignes comprennent à leurs extremités, s'appelle la Parallaxe. Elle fait paroître les Astres un peu plus bas qu'ils ne sont en effet. La Lune a la plus grande Parallaxe entre toutes les Planêtes.

CHAPITRE TROISIEME.

Du mouvement des Corps Célestes en particulier.

I. IL y a trois sortes differentes de Corps Célestes, qui sont les Etoiles fixes, les Planêtes & les Comêtes. Depuis le tems, dont il nous reste des monumens, toutes les observations que l'on a fait sur les étoiles fixes, font voir qu'elles gardent toujours la même distance entr'elles. De plus leurs Ascensions droites & leurs Déclinaisons étant observées, si on réduit ces Observations à la Latitude & à la Longitude, on remarque dans les Etoiles fixes un mouvement très-lent, qui paroît aller d'Occident en Orient dans des Cercles paralleles à l'Ecliptique. Ainsi leur Latitude ne change point, & la Longitude n'avance que d'environ un degré en 72. ans. Pour mieux connoître les étoiles, dont le nombre va à 1300. ou 1400. on ne les distingue pas seulement en sept classes selon leur grandeur apparente; mais on a encore fait d'ancienneté pour soulager la mémoire certaines figures soit humaines ou autres, que l'on appelle Constellations, & dont chacune contient une quantité d'étoiles visibles sans lunette, qui représentent à-peu-près cette figure-là. Il y en a douze dans le Zodiaque, 21. dans l'Hemisphere septentrional, & 15. au delà du Zodiaque dans la partie méridionale. Et puisqu'après ces constellations il est encore resté des petites étoiles sémées, que les Anciens n'avoient pas figuré, & qu'on a encore découvert une partie vers le Pole Antartique; les modernes ont encore ajouté 6. constellations Septentrionales & 18. Méridionales. L'éclat & le brillant des Etoiles fixes, joint à leur grand éloi-

gnement du Soleil font conclure, que leur lumiere leur est propre.

II. Les Planêtes sont des Corps Célestes, qui sont entre les Etoiles fixes & la Terre, & dans lesquelles il paroît un mouvement propre d'Occident en Orient sous le Zodiaque. Parmi ces Planêtes le Soleil & la Lune sont assez connu. Saturne paroît pâle, & son mouvement est assez lent, puisqu'il ne fait le tour du Ciel que dans environ 30. ans. Jupiter est fort clair, & il acheve le tour du Ciel dans 12. ans. Mars est d'une couleur tirant sur le rouge, il acheve sa route en moins de 2. ans. Vénus est la Planête la plus claire, & elle ne s'éloigne qu'à environ 47°. du Soleil. Mercure est une Planète fort petite, mais assez claire, qui ne s'éloigne du Soleil qu'environ 28°. Outre ces Planêtes principales on en a découvert par le moyen des lunettes de longue vûë quatre petites qui tournent à l'entour du corps de Jupiter, & cinq qui tournent à l'entour du corps de Saturne; & on voit même autour du corps de Saturne un orbe, qui ne fait pas corps avec la Planête.

III. Le Soleil fait assez voir par sa figure & par ses effets, que c'est un globe lumineux d'une espece de feu, qui produit la clarté & la chaleur qui est répanduë au moins dans le sistême des Planêtes, qui sont exposées à notre vûë On y découvre souvent des tâches, qui traversent son disque environ en 12 jours, après quoi elles employent environ 15. jours avant qu'elles reviennent. Leur figure est irréguliere & changeante; ordinairement elles paroissent longues vers les bords & plus rondes vers le milieu. Toutes ces apparences font juger, que ce sont des exhalaisons ou fumées du Soleil, qui s'arrêtent dans son Atmosphere, & qui sont entrainées par le mouvement du

Soleil à l'entour de son axe. Le mouvement propre du Soleil paroît toujour dans l'Ecliptique selon l'ordre des signes, c'est-à-dire, d'Occident en Orient, & si l'on observe les Equinoxes consécutifs, on trouvera qu'il parcourt les signes Septentrionaux en 186^{j}. 14^{h}. 53$^{\prime}$. & les Méridionaux seulement en 178^{j}. 14^{h}. 56$^{\prime}$. D'où on voit que ce mouvement est inégal, & c'est ce qui a fait conclure, qu'il se fait dans un Cercle qui est eccentrique à la Terre. Si on substituë à ce Cercle une Ellipse, dans laquelle l'un des foyers étant pris pour centre, le rayon, qui porte la Planête, rase des espaces proportionels au tems, l'hypothese sera plus conforme aux régles generales du mouvement. Les extrémités du grand diamétre de cette Ellipse sont le Périgée, où le Soleil est le plus près de la Terre; & l'Apogée, ou il en est le plus éloigné. Cet Apogée se trouve à présent dans 8^{o} ♋ & il s'avance d'un mouvement très-lent de 1$^{\prime}$. 2$^{\prime\prime}$. 24$^{\prime\prime\prime}$. par an.

IV. La Lune est une Planête qui se meut à l'entour de la Terre dont elle est la plus proche. Elle est d'une consistence opaque; ce qui paroît assez par ses phases, dont les principales sont le premier quartier, la pleine Lune & le dernier quartier; la nouvelle Lune ne paroît point, parce qu'elle est sous les rayons du Soleil. Ainsi elle n'a d'autre lumiere, que celle qu'elle reçoit du Soleil. On remarque par la Lunette d'approche, que les taches qui paroissent dans son disque, sont des parties hautes & basses; les claires sont hautes, parce qu'elles jettent leur ombre suivant qu'elles sont illuminées par le Soleil; les parties obscures semblent être fluides; ainsi le corps de la Lune a beaucoup de rapport avec celui de la Terre. De plus la Lune ne tourne point autrement à l'entour de son axe, si non qu'elle tourne toujours à-peu-près le même côté vers la Terre.

L'Ellipse, dans laquelle la Lune se meut, est fort approchante d'un Cercle ; son apogée fait le tour dans 8. ou 9. ans selon l'ordre des signes; mais cet orbe ou déferent coupe l'Ecliptique sous un angle de 5°. Ces intersections ou nœuds s'appellent la tête & la queuë du Dragon. Ces points ne sont pas fixes dans l'Ecliptique, & au contraire ils la parcourent contre l'orde des signes dans environ 19. ans. Du reste la Lune fait son tour dans environ un mois, & ce mois est ou synodique, qui est d'une nouvelle Lune à l'autre ; ou périodique, c'est-à-dire le tems dans lequel la Lune revient au même point du Ciel dont elle est partie. Quoique le mouvement de la Lune soit très-inégal, on a pourtant trouvé que mesurant ces mois selon un mouvement moyen, le mois synodique est de 29^{j}. 12^{h}. $41'$. & le périodique de 27^{j} 7^{h}. $43'$. $5''$. Le Mois Draconique est le tems que la Lune employe à rejoindre la tête du Dragon, dont elle étoit partie. Le mois d'illumination est l'espace compris entre le tems de l'apparition après la nouvelle Lune jusqu'à ce qu'elle disparoisse avant la nouvelle Lune suivante.

V. Lorsque la Lune étant pleine ou nouvelle elle se trouve dans les nœuds ou auprès, il arrive des Eclipses. Ces Eclipses sont totales, lorsque la Lune est précisement dans le nœud; ou partiales, lorsqu'elle est auprès. Les Eclipses de la Lune arrivent quand la Lune dans son opposition avec le Soleil entre dans l'ombre de la Terre. Ainsi elle commence à s'obscurcir du côté de l'Orient; & pendant qu'elle traverse cette ombre l'obscuration y passe vers l'Occident, où elle se perd. Ce Phenomene est commun à tous les habitans de la Terre, qui ont la Lune dessus leur horizon; & on conçoit aisement qu'il arrive par-tout dans le même instant; cependant puisque

ceux

Digitized by Google

ceux qui ſont plus vers l'Orient comptent plus d'heures, lorſque ce ſpectacle arrive, que ceux qui ſont vers l'Occident, on peut ſe ſervir avantageuſement des l'Eclipſes de la Lune pour perfectionner la Géographie. Les Eclipſes du Soleil arrivent lorſque la nouvelle Lune eſt dans les nœuds ou auprès. On remarque dans ces Eclipſes, que l'obſcuration commence par la partie occidentale du Soleil & qu'elle paſſe vers ſa partie orientale. On remarque encore que la même partie du Soleil n'eſt pas obſcurcie également par-tout; & qu'enfin les habitans de l'Occident la voyent avant ceux qui ſont vers l'Orient. Ainſi c'eſt la Lune qui paſſe deſſous le Soleil, & qui nous cache ſa vûë en tout ou en partie. Ces Eclipſes ſont à proprement parler des Eclipſes de terre. Car la Lune paſſant centralement ou à-peu près entre le Soleil & la Terre fait que ſon ombre tombe ou entierement ou en partie ſur certains endroits de la Terre, d'où l'œil à cauſe de ſon grand éloignement rapporte l'obſtacle au diſque du Soleil. On meſure la plus grande obſcuration des Luminaires par doigts. Pour cet effet le diametre apparent du Luminaire ſe diviſe en 12 parties égales, qu'on appelle doigts; & puiſque le diametre apparens de la Lune ne ſurpaſſe gueres le diametre apparent du Soleil, les Eclipſes ſolaires ne paſſent pas ordinairement les douze doigts; ainſi lorſqu'elles ſont totales, elles ne durent pas longtems telles. Mais puiſque dans les Eclipſes lunaires le diametre de l'ombre de la terre, là-où la Lune paſſe, eſt bien plus grand que le diametre de la Lune, ces Eclipſes ſe trouvent ſouvent par le calcul plus grand que de douze doigts; & alors elles ſont totales pendant quelque tems ou avec demeure; & pendant ce tems la Lune ou ne paroît pas du tout, ou elle paroît ſous une couleur rougea-

tre ou autre. Il faut attribuer cette apparition ou à l'ombre & pénombre de la terre, ou aux diverses constitutions de l'Athmosphere.

VI. Vénus & Mercure étant regardés par la Lunette de longue vûë nous montrent differentes phases semblables à celles de la Lune. Il y à cependant cette difference, que Vénus, par ex. paroît pleine, lorsqu'après sa conjonction avec le Soleil elle paroît le soir; cette phase diminuë jusqu'à ce que dans sa plus grande Elongation elle soit mi-partie, & elle décroit encore plus jusqu'à ce qu'elle disparoisse dans sa conjonction. Après cette conjonction elle paroît le matin en croissant, jusqu'à ce qu'elle soit mi-partie à son autre Elongation, d'où son disque se remplit de plus en plus jusqu'à sa conjonction. Il en est de même de Mercure. Ceci fait voir que ces deux Planêtes sont des corps opaques, qui se meuvent à l'entour du Soleil, & qu'elles en sont plus proches que la Terre. De plus leurs diametres apparens sont plus grands lorsqu'elles sont en croissant que lorsqu'elles sont pleines; Ainsi dans ce dernier cas elles sont plus éloignées de la Terre. Ces mouvemens se faisant dans des Ellipses à l'entour du Soleil, les éxtremités du grand diametre sont l'Aphelie ou le plus grand éloignement du Soleil, & le Perielie ou la plus proche distance de la Planête & du Soleil. Le mouvement de ces points n'est que d'environ une minute & demi par an dans l'une & dans l'autre. Le mouvement de l'une & de l'autre de ces deux Planêtes étant réduit au moyen, Vénus fait son tour à l'entour du Soleil en 224^{j} 17^{h}. $44'$. $55''$. $14'''$. Mercure acheve le sien en 87^{j}. 23^{h}. $14'$. $24''$. Enfin le déferant de Vénus fait avec l'Ecliptique un angle de 3^{o}. $23'$ & ses nœuds avancent par an de $46''$. Le déferant de Mercure fait avec l'Ecliptique un angle de 6^{o}. $52'$. & le mouvement annuel de ses nœuds est $1'$, $25''$.

VII. Saturne, Jupiter & Mars se montrent toujours de pleine face aux habitans de la Terre; qu'ils soient en conjonction ou en opposition avec le Soleil. Ainsi la Terre & le Soleil sont renfermés dans leurs orbes. Et par ce qu'ils nous paroissent plus grands dans leur opposition avec le Soleil que dans leur conjonction, il suit que dans l'opposition ils sont plus proches de la Terre. On conclud que ces Planêtes sont des corps opaques; car Jupiter jette une ombre dans laquelle ses Satellites se perdent ou disparoissent; & ces mêmes Satellites jettent leur ombre sur le corps de Jupiter, lorsqu'ils passent entre lui & le Soleil. Mars paroît quelquefois moins que plein. Quant à Saturne & ses Satellites on n'y a point encore découvert d'ombre notable, à cause de son grand éloignement; mais parce que sa clarté est fort foible, on en infere, qu'elle n'est qu'une réflexion des rayons du Soleil. On a découvert de plus, que les Satellites de Saturne & de Jupiter ont leurs périodes réglées chacun à l'entour de sa Planête; & les tâches, que l'on observe dans Jupiter, Mars & Vénus, font conclure que ces Planêtes, & par conséquent aussi les autres, tournent à l'entour de leurs axes. L'Orbe ou le déferent de chacune de ces Planêtes coupe l'Ecliptique en deux nœuds; celui de Saturne sous un angle de $2^{\circ}. 33'. 30''$. celui de Jupiter $1^{\circ}, 19^{\circ}. 20''$ & celui de Mars $1^{\circ}. 51'$. & ces nœuds se meuvent aussi d'un mouvement assez lent. Si l'on conçoit que le mouvement de ces Planêtes se fait aussi dans des Ellipses à l'entour du Soleil, & que l'on découvre par les observations & le calcul l'endroit & le mouvement de leurs Aphelies, on pourra déterminer leurs lieux au Ciel. Et tout leur mouvement étant réduit au moyen, on trouve que Saturne fait sont tour à l'entour du Soleil en 29.

ans 174 j. 4^{h}. $58'$. $25''$. $30'''$. Jupiter en 11^{s}. 317 j. 14^{h}. $49'$. $31''$. $56'''$. Mars en 1^{s}. 321 j. 23^{h}. $31'$. $56''$ $49'''$.

VIII. Tout le calcul de l'Aſtronomie étant fondé ſut les Obſervations, il ne ſert pas ſeulement à nous faire voir en quel point du Ciel chaque Planête ſe trouve en tout tems; mais il nous fait encore connoître leurs diſtances mutuelles. Car une Planête étant hors de ſa conjonction ou oppoſition avec le Soleil, ces trois corps, c'eſt-à-dire, celui de la Planête, celui de la Terre & celui du Soleil formeront un triangle, dont on pourra connoître les angles, & par conſequent le rapport qui eſt entre ſes côtés. Et puiſque l'on connoît par le moyen de la Parallaxe les diſtances qui ſont entre la Terre & les Planêtes qui lui ſont plus proches; on pourra trouver auſſi les autres. C'eſt ſur ces principes que l'on a établi les diſtances ſuivantes en Rayons du Globe de la Terre.

Diſtance du ☉	Grande.	Moyenne.	Petite.
♄	345560	326925	308260
♃	187254	178640	170026
♂	57226	52325	47426
♁	34965	34377	33758
♀	25061	24889	24717
☿	16142	13340	10537

Diſtance de la ♁	Grande.	Moyenne.	Petite
♄	380546	327544	274532
♃	222256	179259	136268
♂	92221	52944	13668
☉	34996	34377	33759
♀	60056	34548	9041
☿	51138	37179	23221

Mr. Cassini ayant substitué la Parallaxe du Soleil un plus grande ≍ de $10''$. au lieu de $6''$. il a trouvé ces distances plus petites. Les voici :

Distance de la ♁	Grande.	Moyenne.	Petite.
♄	244000	210000	176000
♃	143000	115000	87000
♂	59000	33500	8000
♀	22374	22000	21626
♁	38000	22000	6000
☿	33000	22000	11000
☾	61	57	53

On est venu par-là à un Theorême géneral, qui dit; que les quarrés des tems périodiques des Planètes à l'entour du Soleil sont entre eux en raison triplée de leurs distances du Soleil. Enfin ces distances & les Diametres apparens des corps célestes étant connus on a inferé, pour trouver le rapport que ces corps ont entre eux. Les voici dans les deux Tables suivantes;

	Raison des Diametres au Diamétre du ☉	Rais. des Surf. à celle de ☉	Raison des Solidités à celle du ☉
Anneau de ♄	11 : 37		
Corps de ♄	5 : 37	1 : 55	1 : 504
♃	2 : 11	1 : 30	1 : 166
♂	1 : 166	1 : 27556	1 : 4574296
♁	2 : 305	1 : 23256	1 : 3546578
♀	1 : 84	1 : 7056	1 : 592704
☿	1 : 290	1 : 84100	1 : 24389000

Raiſon du Diam. de la ♁ à ceux des Plan.		Raiſ de la Surf. de la ♁ aux Pla.	Raiſon de la Solidité de la ♁ à celles des autres Plan.
Ann. de ♄	1 : 45		
Corps de ♄	1 : 20	1 : 400	1 : 8000
♃	1 : 28	1 : 784	1 : 21952
♂	12 : 11	6 : 5 ou 1 : $\frac{5}{6}$	13 : 10 ou 1 : $\frac{10}{23}$
☉	2 : 305	1 : 23256	1 : 3546578
♀	4 : 7	1 : 3	3 : 16 ou 1 : $5\frac{1}{3}$
☿	19 : 9	9 : 2 ou 1 : $\frac{2}{9}$	$9\frac{1}{7}$: 1 preſque.
☾	100 : 133	14 : 1	52 : 1 preſque.

IX. Outre les Phenomenes ſuſdits, il y a encore un bien remarquable, qui eſt, qûe les 5. Planêtes ♄ ♃ ♂ ♀ & ☿ ſemblent s'arrêter quelquefois dans leur chemin, après quoi ils s'en retournent pendant un tems, juſqu'à ce qu'ils s'arrêtent encore, & que de là ils reprennent leur route à l'ordinaire. C'eſt ce qui les fait nommer Directes, Stationaires & Rétrogrades. Ceci a fait ſuppoſer anciennement, que ces Planêtes ſe meuvent dans des Epicycles dont le centre eſt porté dans le déferent de la Planête. Nous dirons plus de ce Phenomene dans le Chapitre ſuivant.

CHAPITRE QUATRIEME.

Des Syſtêmes de l'Univers.

I. LEs Syſtêmes nous dévant repréſenter dans quel ordre les corps céleſtes ſont diſpoſés pour faire ce Tout admirable de l'Univers, & de quelle maniere ils y font leur mouvement; il eſt évident que le Syſtême vulgaire, qui met la Terre dans le centre de l'Univers, & qui décrit les orbes de toutes les Planêtes à l'entour d'elle n'eſt point ſoutenable. Car nous ne voyons jamais Vénus & Mercure en oppoſition avec le Soleil; & nous

avons vû que ces deux Planêtes font uniquement leur tour à l'entour du Soleil.

II. Ainsi tout bien consideré, si on pose la Terre pour le centre de l'Univers, & que l'on décrive un petit cercle à l'entour d'elle, ce sera l'Orbe de la Lune. On mettra plus haut Vénus & Mercure; parce que la Lune nous les couvre quelquefois. Et puisque ces deux Planêtes ne s'éloignent pas beaucoup du Soleil on décrira leurs orbes d'un centre commun, qui est le Soleil Si ensuite de la Terre comme centre on décrit un cercle par le point qui marque le Soleil, on aura son déferent Après ceci on décrira l'Orbe de Mars, qui doit entrecouper le déferent du Soleil, parce qu'on le voit quelquefois bien plus près de la Terre que le Soleil; ce qui arrive dans leur opposition. Au lieu que vers le tems de leur conjonction il est sept à huit fois plus éloigné; ainsi le centre de cet Orbe sera le Soleil. Après cela on décrira de ce même centre l'Orbe de Jupiter, & plus loin celui de Saturne. Enfin on décrira de la Terre, comme centre, si on veut, le cercle qui marque le Firmament ou le Ciel des Etoiles fixes. Ce Systême ingenieux que l'on appelle Tychonien a été produit par son inventeur Tycho de Brahe, pour maintenir la Terre immobile dans le centre de l'Univers; lequel par conséquent doit tourner en vingt-quatre heures à l'entour de la Terre, d'Orient en Occident, pendant que chaque Planête va d'un mouvement propre dans son Orbe d'Occident en Orient. Outre quelques difficultés, qu'on ne peut point rapporter ici, plusieurs sont choqués de voir l'intersection des orbes de Mars & du Soleil, qui y est nécessaire. Ainsi quelques-uns ont mieux aimés embrasser le Systême suivant. *Fig.* 1.

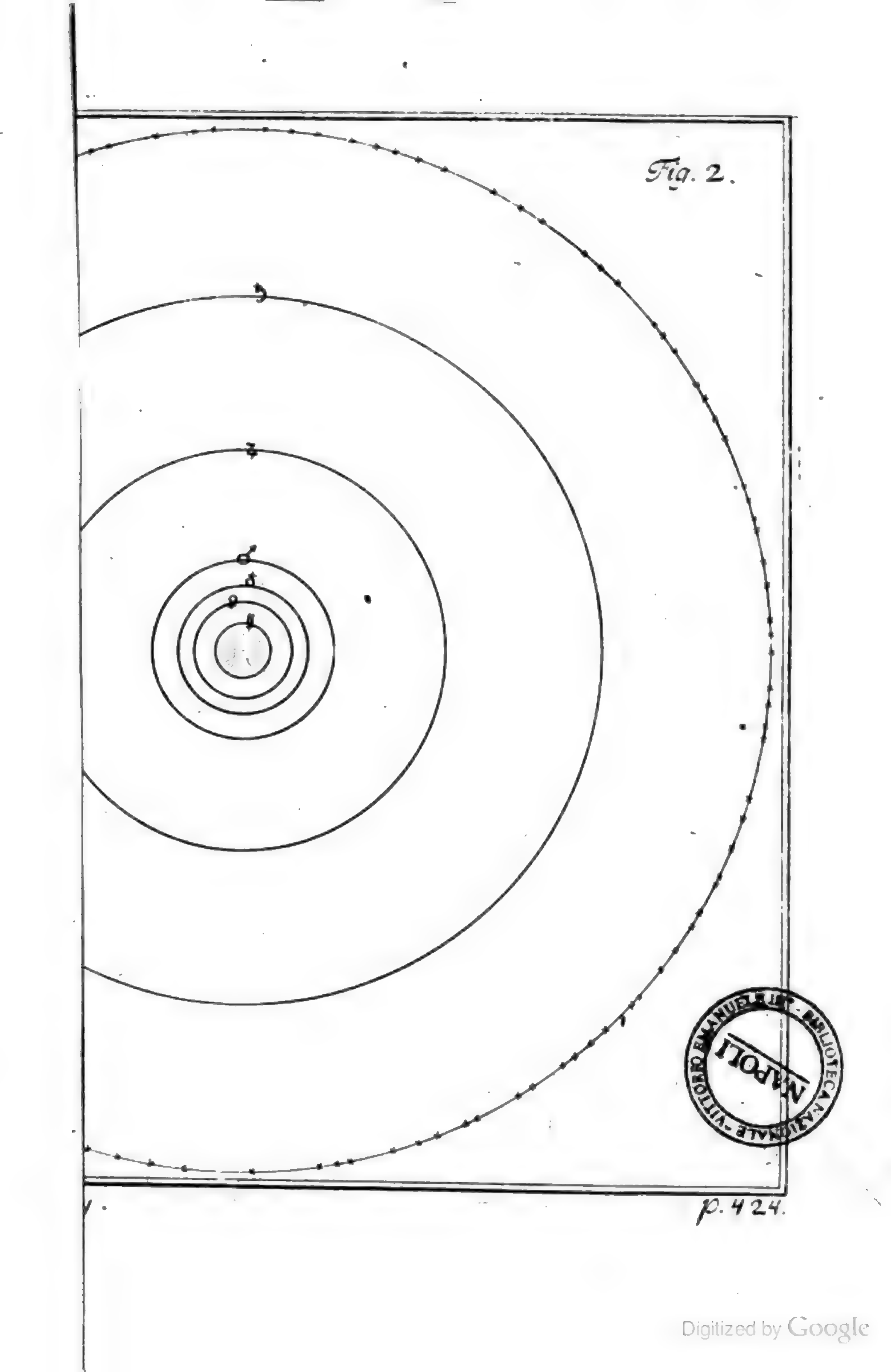
III. Ce Systême étoit assez connu aux Anciens, & on

Fig. 2. ne l'attribuë à Copernic, que parce qu'il l'a mis dans son jour. Il place le Soleil dans le centre de l'Univers, & il rapporte en échange la Terre entre les Planètes. Ainsi décrivant du Soleil comme centre six cercles à differens rayons, le plus petit représente l'orbe de Mercure, le second celui de Vénus, le troisiéme celui de la Terre, qui est surmonté d'un Epicycle, qui est celui de la Lune. Le quatriéme est celui de Mars, le cinquiéme celui de Jupiter. On surmonte celui-ci de quatre Epicycles décrits du même centre pour les Satellites de Jupiter. Et enfin le sixiéme qui est l'orbe de Saturne est de même surmonté de cinq Epicycles pour ses Satellites. Dans ce Systême le mouvement commun, qui se fait en vingt-quatre heures cesse; & on suppose en sa place, que la seule Terre tourne en vingt-quatre heures à l'entour de son axe d'Occident en Orient, ce qui sauve toutes les apparences du lever & du coucher des Astres. De plus la Terre tournant aussi dans cette supposition dans le tems d'un an dans son orbe, elle rapporte le Soleil à la partie opposée, & elle rapporte de même les autres Planètes aux endroits qui leur conviennent. Enfin elle sauve le Phenomene de Stations & Rétrogradations des Planètes par un seul jeu d'Optique, sans qu'elle ait besoin de recourrir à l'embarras des Epicycles. Les Planètes supérieures deviennent rétrogrades vers leur opposition avec le Soleil; les inférieures vers leur conjonction. Saturne devient stationaire dans la distance d'un peu plus d'un quart de cercle. Jupiter dans la distance d'environ 120°. Mars dans une plus grande distance. Vénus & Mercure une fois le soir après la direction, & l'autre fois le matin après la rétrogradation; chaque Sation arrive entre le Soleil & le terme du plus grand éloignement. Les rétrogradations de ♄ sont éloi-

Fig. 1.

Lit Xxx. p. 424.

Biblioteca Nazionale Vittorio Emanuele III Napoli



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI
Digitized by Google

gnées l'une de l'autre environ d'un an & de 13 jours. Celles de ♃ de 1ª. 43 j. celles de Mars de 2ª. 50 j. celles de ♀ de 1ª. 220 j. & celles de Mercure de 115 j. c'est-à-dire

	♄	♃	♂	♀	☿
Stationnaire,	8.	4.	2.	$1\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$.
Rétrograde,	140.	120.	73.	42.	22.
Directe,	243.	284.	705.	542.	93.

Tout ceci n'est pas pourtant toujours égal. Voici de quelle maniere on prétend selon ce Systême que ce phenomene arrive. Soit S le Soleil; l'orbe intérieur I, II, III, IV, &c. celui de la Terre; le suivant 1, 2, 3, 4, celui d'une Planête supérieure, & enfin l'extérieur *a*, *b*, *c*, *d*, &c. le Firmament. La Terre étant en I, & la Planête en 1, celle-ci sera rapportée en *a*; puis l'une & l'autre se trouvant en II, & en 2, la Planête paroîtra en *b*, l'une & l'autre étant en III, & 3, la Planête paroîtra en *c*, l'une & l'autre étant en IV, 4, la Planête paroîtra en *d*; jusqu'ici le mouvement est directe. Mais l'une & l'autre étant successivement en V, 5, en VI, & 6, la Planête paroîtra retourner de *d* par *e* en *f*, d'où ensuite elle reprend sa direction de *f* vers *g* & *h*, &c. Dans ce systême il faut prendre tout l'orbe dans lequel la Terre se meut, pour un point ou centre par rapport au firmament; dont par conséquent l'étenduë devient d'une grandeur prodigieuse. Du reste la raison humaine ne trouve rien à redire à ce systême. Fig. 3.

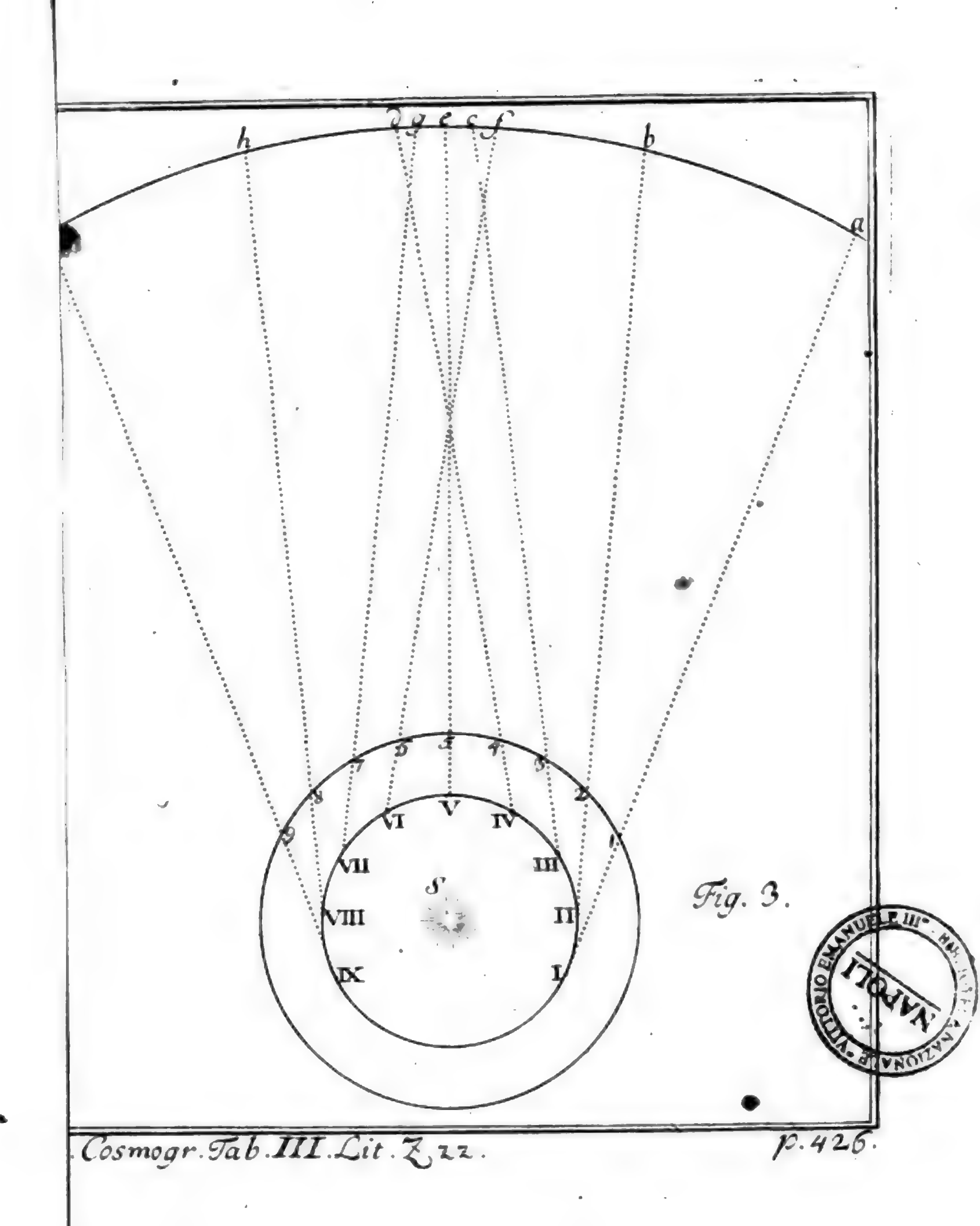
IV. Les Aspects des Planêtes sont:

☌ la Conjonction,
⚹ le Sextile,
□ le Quarré,
△ le Trigone,
☍ l'Opposition.

On voit aisément par leurs noms, que ce sont des parties aliquotes du cercle. Les Astrologues, qui en font le plus de cas, ont apparamment oublié d'y ajoûter le Pentagone, le Décagone, &c.

V. On estime que toutes les Etoiles fixes sont autant de Soleils, c'est-à-dire, des corps lumineux. Car leur grande distance du Soleil, joint à leur éclat brillant ne permet pas de croire, qu'elles reçoivent leur lumiere du Soleil. On ne peut pas déterminer si elles sont toutes également distantes du centre de l'univers, ou si les plus grandes y sont plus proches & les moindres plus éloignées. Il est rare qu'il en paroisse une nouvelle. Quelques-unes paroissent & disparoissent pendant un certain tems en gardant des degrés dans leur accroissement & diminution. La Lunette d'approche ne porte pas assez loin pour nous y faire découvrir quelque particularité remarquable; elle nous en montre seulement un très-grand nombre que l'œil seul ne peut point découvrir. On sçait par-là que la voye de lait n'est qu'un amas d'un nombre infini de petites Etoiles.

VI. Outre ces Corps Célestes il y en a encore d'autres, qui paroissent plus rarement, & que l'on regarde avec plus d'admiration. Ce sont les Comêtes qui paroissent comme des Etoiles avec une queuë ou une chevelure lumineuse. Le corps de ces Etoiles paroît comme composé d'une matiere héterogene & variable; la queuë ressemble à une fumée; à travers de laquelle on a vû quelquefois des étoiles fixes; elle est toujours tournée fuyant le Soleil. Le corps de la Comête suit un mouvement réglé à-peu-près comme les Planêtes; ce que l'on découvre en observant toujours exactement sa longitude & sa latitude. Ces observations étant faites dans des endroits fort distans,



VITTORIO EMANUELE III · BIBL. NAZIONALE · NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

on n'y a point trouvé de parallaxe notable; ainsi elles sont plus hautes que la Lune; & par conséquent les Orbes des Planêtes, qui leur donnent un libre passage ne sont point solides, comme on croyoit anciennement. On a même remarqué qu'elles ont une espece de route ou Zodiaque particulier, qui sont les Constellations d'Antinous, Pegase, Andromede, le Taureau, l'Orion, le petit chien, l'Hydre, le Centaure, le Scorpion, & le Sagittaire. De tout ceci on conjecture que les Comêtes sont des corps, qui se meuvent dans une ligne courbe, comme seroit une parabole, dont le foyer est le Soleil. Elles en approchent si près, qu'elles seroient détruites, si elles n'étoient que des exhalaisons planêtaires. Mais parce que l'on manque d'observations suffisantes, on ne peut rien encore décider touchant leurs révolutions.

CHAPITRE CINQUIEME.

Des differentes méthodes dont on se sert pour représenter le Ciel & les Phénomenes Célestes.

I. OUtre les differentes sortes de Spheres, que l'on a imaginé pour représenter les differens mouvemens des Planêtes, on donne encore d'autres représentations, qui nous rendent la disposition du Ciel & de ses phénomenes sensible.

II. Les plus simples de ces représentations sont celles, qui donnent les constellations avec les Cercles de la Sphere dans le plan, ou dans des Cônes creux; mais elles ne servent prêsqu'à autre chose, qu'à la simple connoissance des Etoiles.

III. Les plus composées sont le Globe Céleste & l'Astrolabe. Le Globe céleste est un Globe sur lequel sont représentés toutes les constellations & les cercles de la Sphere. Il est suspendu dans son Méridien, qui est mobile dans l'Horizon & surmonté d'un Cycle horaire. On s'en sert pour comprendre sensiblement les Phénoménes célestes.

IV. Ainsi le Globe étant posé selon l'élevation Polaire d'un lieu donné, si on sçait le degré de l'Ecliptique où se trouve le Soleil, on connoîtra par la seule révolution du Globe son Ascension droite, son Ascension & Descension oblique, son Amplitude Orientale ou Occidentale, sa hauteur Méridienne, le tems de son lever & de son coucher; par conséquent la longueur du jour & de la nuit; l'Azimuth & la hauteur du Soleil à un tems donné, ou au contraire. La même chose se trouve encore à l'égard de telle Etoile ou autre point du Firmament que l'on voudra. Nous ne parlons pas de son usage pour faire le Théme céleste, ou pour trouver les lignes horaires des Cadrans, le premier étant vain, & le second peu exacte.

V. L'Astrolabe est une réprésentation du Globe céleste ou de la Sphere dans le plan; par lequel on peut résoudre les mêmes Problêmes d'Astronomie que l'on résout par le Globe. Mais parce que l'on n'y peut point changer l'élevation Polaire, on y a suppléé en formant des Planches dressées sur plusieurs differentes élevations Polaires. Cependant la difficulté de son usage ne compensant point assez le défaut qui se trouve dans celui du Globe; le meilleur expédient pour ceux qui travaillent en Astronomie, est celui de venir de la connoissance du Globe au Calcul.

CHAPITRE SIXIEME.

Des Principes de la Gnomonique.

I. LA distance entre le Soleil & la Terre étant si grande, qu'à son égard le diamétre de la Terre devient insensible ; il est évident qu'on peut prendre tel point de la Terre que l'on veut pour le centre de la Sphere. Et si sur quelque plan voisin on fait la projection des cercles de la Sphere par rapport à ce point ; cette projection s'appelle un Cadran. C'est suivant les differentes expositions de ces plans, que les Cadrans sont appellés Horizontaux, Verticaux, Méridionaux, Septentrionaux, Polaires, Equinoctiaux, Orientaux, Occidentaux, Déclinants, Inclinés & Réclinés. Mais le seul Cadran Horizontal pouvant servir de principe pour la construction de tous les autres, nous donnerons d'abord la méthode de le décrire.

II. Si sur une ligne Méridienne (dont nous donnerons la déscription dans la seconde Section) on conçoit posé perpendiculairement un triangle rectangle, tel que PSE, dont l'angle P égal à l'élevation du Pole est vers le Sud ; l'angle E égal à celle de l'Equateur vers le Nord ; il est évident que le côté PS peut être pris pour une partie de l'axe du monde, & S pour le centre, ainsi la ligne SE sera dans le plan de l'Equateur. Or ce plan étant perpendiculaire à l'axe PS. il coupera l'horizontal aussi perpendiculairement à la ligne Méridienne. Ainsi tirant dans le plan horizontal, par le point E la ligne QR perpendiculaire à la méridienne PE, cette ligne QR représentera l'intersection de l'Equateur & du plan horizontal. Si après ceci on conçoit un Cercle décrit du cen- Fig. 4.

treS, & de l'intervalle SE, ce cercle représentera l'Equateur; par conséquent étant divisé du point E en 24. parties égales, ces parties seront les heures. Or les rayons qui aboutissent à ce point de division étant prolongés, ils rencontrent la ligne QR dans des points, où tombera l'ombre de l'axe PS, au bout de chaque heure. Ainsi ces points de la ligne QR sont ceux par lesquels & le pole P, doivent passer les lignes horaires. On voit bien que ce n'est que pour faciliter cette operation que l'on porte la longueur ES, depuis E en V, sur la méridienne, & que l'on décrit le cercle du centre V. Après quoi on n'aura plus qu'à tirer les lignes horaires du point P, par les points 1, 2, 3, 4, 5, du côtté EQ, & par ceux de 11, 10, 9, 8, 7, du côté de ER, la ligne de 6. heure se tire par le point P parallelement à QR, & si on prolonge par ledit point P les lignes de 5, 4, 7 & 8, on aura un cadran horizontal complet, quant aux lignes horaires. Du reste le stile que l'on met à ce cadran est ou une verge posée dans le sens de l'axe PS, ou un triangle semblable à cleui de PSE, dont on à soin d'écorner le côté SE en guise d'ornement, n'y ayant que l'ombre du côté PS qui doive marquer les heures; ou bien on pose un stile vertical ST dans le cadran, & alors ce n'est que l'éxtrémité S de ce stile, qui montre les heures.

III. Les Cadrans Equinoctiaux, ou qui sont dans le plan de l'Equateur, ne sont qu'un cercle divisé en 24. parties égales; le stile est placé perpendiculairement dans le centre. Les Cadrans Polaires sont dans le plan parallele à l'axe du monde; ainsi les points horaires se trouvent comme dans le cadran horizontal; mais les lignes horaires sont paralleles entre elles, puisqu'elles ne concourrent qu'à une distance infinie, c'est-à-dire au Pole de l'Univers. *Fig.* 5.

Digitized by Google

On y suppose la ligne SE être le stile perpendiculaire.

IV. Lorsqu'un plan vertical est exposé directement vers la plage du levant ou du couchant, le Cadran qu'on y décrit est Oriental ou Occidental. Voici comme on le décrit: ayant tiré la ligne horizontale HO, on tire par le point T, qui est le pied du stile, la ligne EQ, faisant l'angle OTQ, égal à l'angle de l'élevation de l'Equateur. Ensuite on y mêne la perpendiculaire TS égale à la longueur du stile, & décrivant du point S un demi-cercle, qu'on divise du point T de part & d'autre en des vingt-quatriémes de Cercle, on déterminera sur la ligne EQ les points horaires, par lesquels menant des perpendiculaires, on aura les lignes horaires; celle qui passe par le point T est toujours la ligne de 6. heures, & il ni a de difference à ces deux Cadrans, si ce n'est qu'à l'Oriental l'angle OTQ est vers la gauche, & dans l'Occidental il est vers la droite. Le reste des heures s'y marque facilement. Le stile s'y dresse perpendiculairement; ou bien on y en éleve deux aux extrémités de la ligne de 6 heures, qui soutiennent une verge, laquelle fait partie de l'axe du monde, & qui marque les heures en couvrant les lignes horaires de son ombre. *Fig. 6.*

V. Pour décrire le Cadran Vertical Méridional, on n'a qu'à concevoir un plan Vertical sur la ligne QR du Cadran horizontal, & la ligne PS étant prolongée vers ce plan jusqu'en X, ce point X sera le Pole du Vertical; d'où tirant des lignes droites aux points horaires de la ligne QR, ces lignes seront les lignes horaires, que l'axe ou le stile XS couvrira successivement de son ombre. On peut décrire ce Cadran de même que l'horizontal, si l'on conçoit le triangle XSE être le stile appliqué en XE au plan vertical; alors le rayon du cercle, qui repré- *Fig. 4.*

Digitized by Google

ſente l'Equinoctial ſera SE, &c. Si on décrit les lignes horaires depuis 4. juſqu'à 8. du matin & du ſoir ſur un plan vertical directement oppoſé au Nord, on aura un Cadran Septentrional.

VI. Lorſque le plan vertical, ſur lequel on doit tracer un Cadran ne regarde pas directement une des 4. plages principales, comme il arrive le plus ſouvent, il eſt évident que cela change la conſtruction du Cadran, qui dans ce cas ſera déclinant. Pour cet effet il faut ſçavoir d'abord l'angle que fait le plan du méridien avec le plan propoſé. Cet angle ſe trouve ou par le moyen de la ligne méridienne ou par le moyen de l'aiguille aimantée; où il faut en même tems faire attention à la déclinaiſon de l'aimant pour le lieu & le tems de la conſtruction. Après quoi ayant pris ſur la ligne du midy du Cadran horizontal un point à diſcretion, comme Y, on tire par ce point une
Fig. 4. ligne droite AB ſous un angle PYB égal à l'angle de déclinaiſon du plan propoſé; cette ligne coupera les lignes horaires aux points 1, 2, 3, 4, &c. 11, 10, 9, 8, &c. pour toutes les heures qui pourront entrer dans le Cadran à faire. Or ſi on conçoit qu'il y a ſur la ligne AB un plan perpendiculaire, on déterminera le point, où le ſtile PS prolongé rencontre ce plan vertical, en conſtrui-
Fig. 7. ſant ſur une ligne égale à PY un triangle rectangle en Y, & dont l'angle P, eſt égal à l'élevation Polaire; car le ſommet C ſera le pole du Cadran. Ainſi faiſant tomber
Fig. 8. ſur le plan vertical propoſé du point C, pris à diſcretion, un à-plomb égal à CY, on tirera par le point Y une ligne horizontale; ſur laquelle ſi on porte les diſtances Y1, Y2, Y3, &c. Y11, Y10, &c. on aura tous les points où paſſeront les lignes horaires tirées du pole C. On connoît aiſément que le ſtile doit être dirigé en C par P; mais

mais puiſque le triangle PCY concoureroit toujours avec le plan propoſé ſous un angle oblique ; on fait tomber du point P la ligne AB, la perpendiculaire PD, & tirant par C & D la droite CD, cette ligne eſt appellée la Souſtilaire ; ſur laquelle ſi on éleve perpendiculairement un triangle, dont les côtés ſont CD, DP, PC, ce triangle ſervira de ſtile. On peut même n'y employer que le ſtile PD. Lorſque le plan propoſé décline du Levant ou du Couchant vers le Nord, on peut encore ſe ſervir du Cadran Horizontal ; mais dans ce cas l'interſection Y ſe rencontrera de l'autre côté du Point P, & le pole C du Cadran à conſtruire ſe trouvera en bas. *Fig. 4.* *Fi. 8.*

VII. Comme le plus ſouvent les Cadrans, que l'on doit tracer, ſont ſi grands, qu'il ſeroit difficile de faire les operations ſur le plan même, on fait la deſcription en petit ſur du papier, & enſuite on la rapporte en grand ſur le pan de muraille, dont il eſt queſtion. D'autres qui y cherchent encore plus de juſteſſe, pourſuivent toute la conſtruction depuis ſon principe par le calcul Trigonometrique. D'autres ſe ſervent de quelques machines, dont l'explication ſeroit longue, & l'uſage aſſez embaraſſant.

VIII. L'uſage des Cadrans reclinés ou inclinés eſt rare. On en trouve les points horaires, & les lignes ſur l'Horizontal de même que dans les Déclinans. Il eſt ſeulement à remarquer, que le triangle, qui repréſente le ſtile, n'eſt plus rectangle ; & lorſque le Cadran eſt en même tems déclinant, la ligne du Midy n'eſt plus perpendiculaire à l'horizon. La Souſtilaire s'y détermine de même que dans les Verticaux ; mais le pied du ſtile eſt audelà ou endeçà du point D, ſuivant que le Cadran eſt recliné ou incliné.

IX. Outre les lignes horaires on repréſente ſouvent

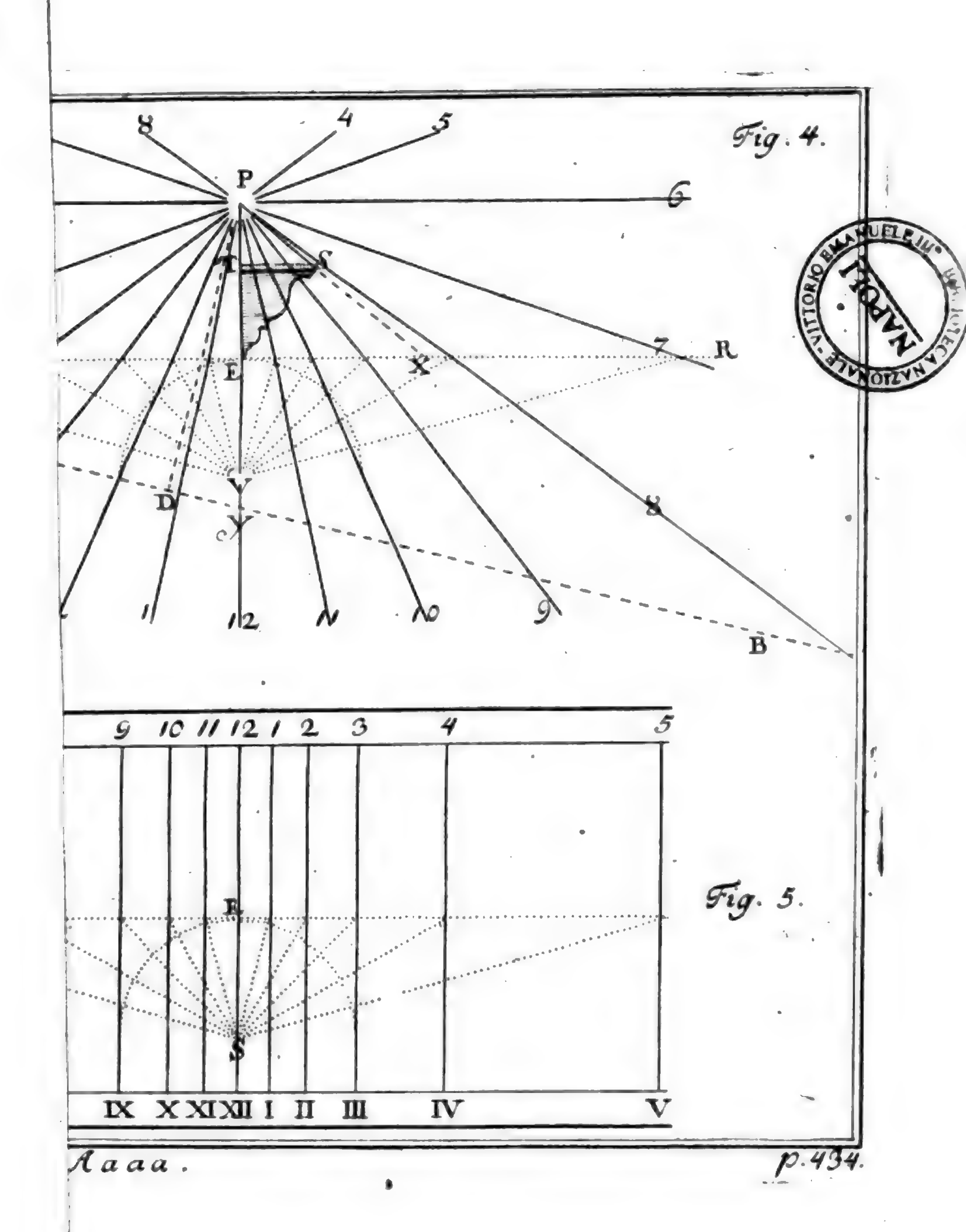
sur les Cadrans les arcs des Signes où se trouve le Soleil. Il faut qu'ils soient représentés par des Sections coniques, puisque les paralleles de l'Equateur, qui passent par les commencemens des signes, sont des petits cercles, de sorte que le sommet du stile étant en même tems le sommet d'un cône, dont un tel cercle parallele est la base, il est évident que sa projection sur le plan proposé représentera une Section conique. On trouve les points necessaires de ces arcs par le moyen de l'Analemme suivant, que nous appliquerons d'abord au Cadran horizontal.
Fig. 9. Soit PSE le stile dudit Cadran; la ligne SE prolongée sera dans le plan de l'Equateur; on prend de part & d'autre de cette ligne les angles:

♈ S ♉ / ♎ S ♏ } 11.° 29'.½ ♈ S ♊ / ♎ S ♐ } 20° 11¼' ♈ S ♋ / ♎ S ♑ } 23.° 29'

qui sont les déclinaisons des commencemens des Signes. Après quoi portant sur la ligne SE prolongée, depuis le
Fig. 10. point P, les lignes horaires du Cadran horizontal P1, P2, P3, &c. les intersections de ces lignes avec celles des signes donneront des points, que l'on marquera sur les lignes horaires du Cadran horizontal, & qui serviront à décrire les Courbes des signes. La ligne de 6. heures est parallele à SE; pour celle de 7. heures on fait l'angle 6P7 égal à l'angle 6P5. Si au lieu des Signes on vouloit marquer les paralleles où les jours auroient augmenté ou diminué d'une heure ou de ½ heure en comptant les équinoxes, on prendroit au lieu des angles ♈ S ♉, &c. ceux des Déclinaisons du Soleil, aux tems d'augmentation ou de diminution proposée.

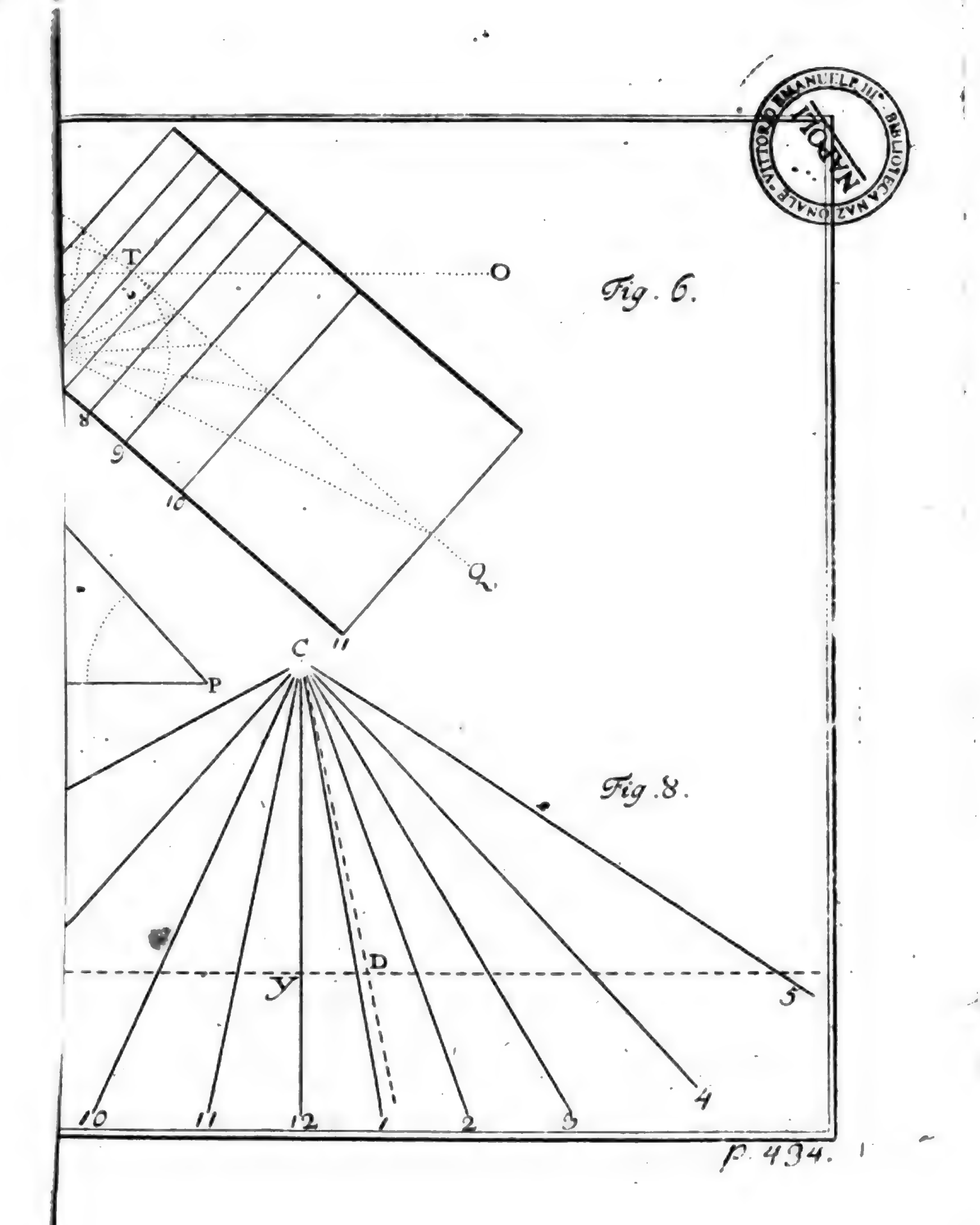
X. Si le Cadran est oriental ou occidental on prend la
Fig. 6. distance depuis le point S, jusqu'à chaque point horaire

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III° NAPOLI

de
de
pa
cu
arc
lie
tia
tric
X
avo
gea
tre
les
par
dra
ve
en
r.
p
tia
he
de
lign
déte
avoi
X
res
Solei
couch
y en
vons

Digitized by Google

de la ligne EQ, que l'on porte dans le susdit Analemme, depuis S sur la ligne SE prolongée. Après quoi on tire par les points que l'on vient de déterminer des perpendiculaires, qui déterminent de part & d'autre les points des arcs des Signes. La même détermination auroit encore lieu dans les Cadrans Polaires; mais dans les Equinoctiaux, ces arcs ne seroient qu'autant de cercles concentriques. Fig. 11. Fig. 12.

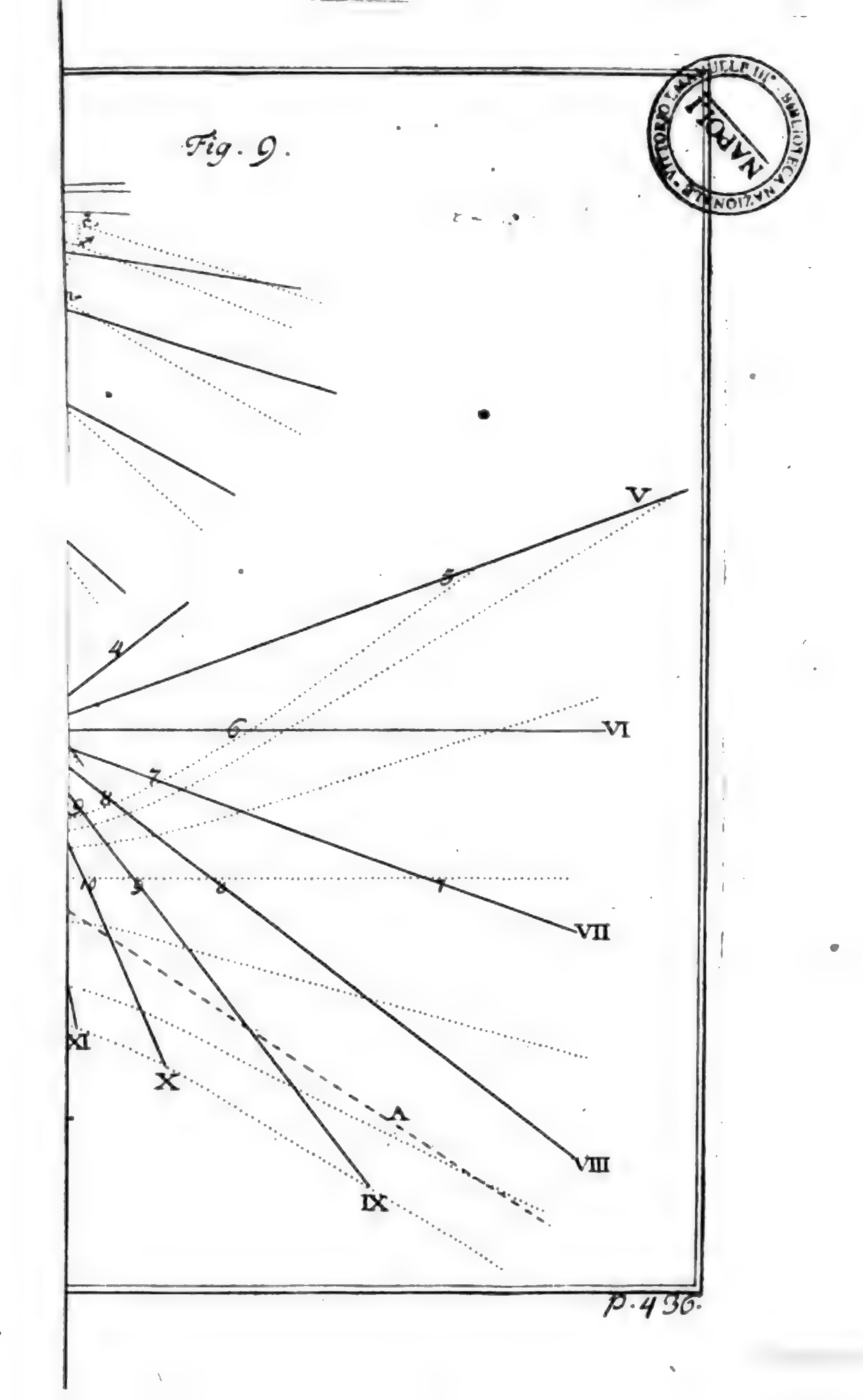
XI. Lorsque le Cadran est vertical méridional, nous avons vû que le triangle XSE, est le stile; ainsi prolongeant SE, & faisant au point S les angles de part & d'autre égaux à ceux de l'Analemme, on y portera de même les lignes horaires X1, X2, &c. pour déterminer les points par où doivent passer les Arcs des Signes. Fig. 4.

XII. Mais si le Cadran vertical est déclinant, il faudra dans le triangle PCY au point P de la ligne PC élever une perpendiculaire, qui rencontre CY prolongée en F, & ce point F étant marqué sur le Cadran, on en fera tomber une perpendiculaire sur la Soustilaire, que l'on prolongera de part & d'autre; ce sera la ligne Equinoctiale, & elle coupera l'horizontale AB, au point de 6. heures. Après quoi si on fait à l'entour de PF les angles de l'Analemme, on y portera depuis C sur PF, &c. les lignes horaires jusqu'à la rencontre de l'Equinoctiale pour déterminer les points des arcs des Signes; comme nous avons montré ci-dessus. Fig. 13. Fig. 14.

XIII. Il y a encore des Cadrans où on marque les heures Babyloniennes, qui se comptent depuis le lever du Soleil; les heures Italiennes, qui se comptent depuis le coucher, & les heures Antiques ou Judaïques, dont il y en a toujours 12. dans le jour. Mais comme nous n'avons pas beaucoup besoin de ces heures, nous n'en disons

rien, non plus que des Cadrans Cylindriques, & de plusieurs autres, dont il y en a qui sont universels. Nous n'ajoûterons qu'une méthode très-simple pour faire un Cadran portatif. On décrit du point A comme centre, & d'un intervalle à discretion comme AB, le cercle B6C, que l'on divise en 24 parties égales, en commençant par le point C. On fait à l'extrémité C, du Diamétre B C l'angle BCD égale à l'élevation polaire. Au point où la ligne CD rencontre le diamétre 66A prolongé, on y tire la perpendiculaire EF, dont les points E, F se déterminent par les lignes CE, CF, qui font chacune avec DC, un angle de 23°. 29'. on décrit du point D, & de l'intervalle DE, un cercle, que l'on divise en 12 parties égales; on y joint les points opposés de même que dans le premier Cercle, comme il se voit dans la figure, & les parties sur la ligne EF marquent les Signes du Zodiaque. Ensuite pour retrancher le superflu on décrit du point E & du rayon EC un arc C $\frac{4}{8}$, de même que du point F, un autre arc C $\frac{8}{4}$, on perce la ligne EF, à travers laquelle on fait passer un fil de soye avec une perle coulante, & un petit poids à son extrémité; enfin on fait deux pinnules aux extrémités d'une ligne parallele à BC, comme seroient les points G,H. Pour se servir de ce Cadran on pose le fil de soye sur le lieu du Soleil, & ce fil tendu on fait aller la perle au point C, qui est celui du Midy; ensuite on éleve les pinnules; & faisant passer à travers d'elles un rayon du Soleil, la perle marquera l'heure dans l'écusson où se trouvent les lignes horaires.

Fig. 15.



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

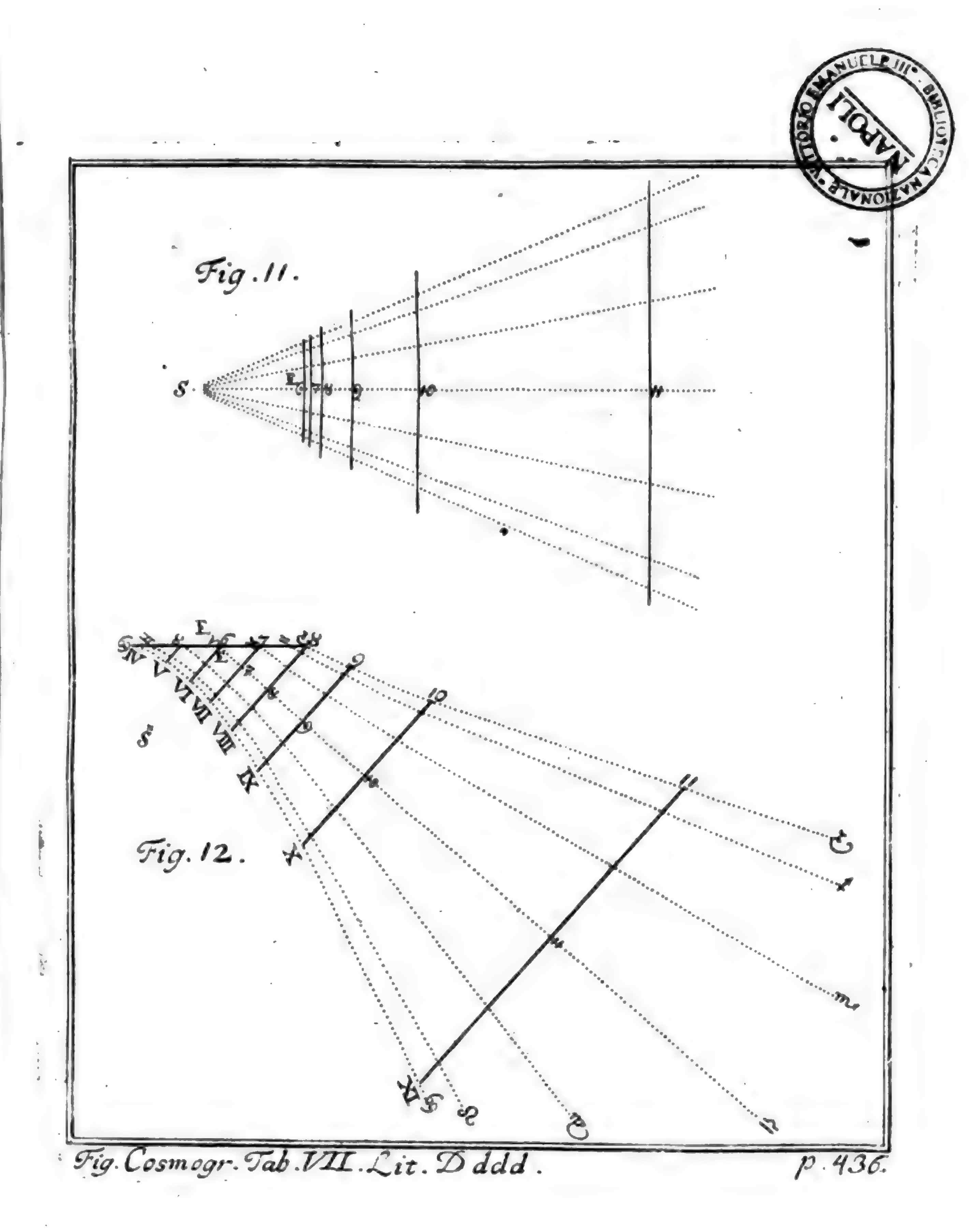
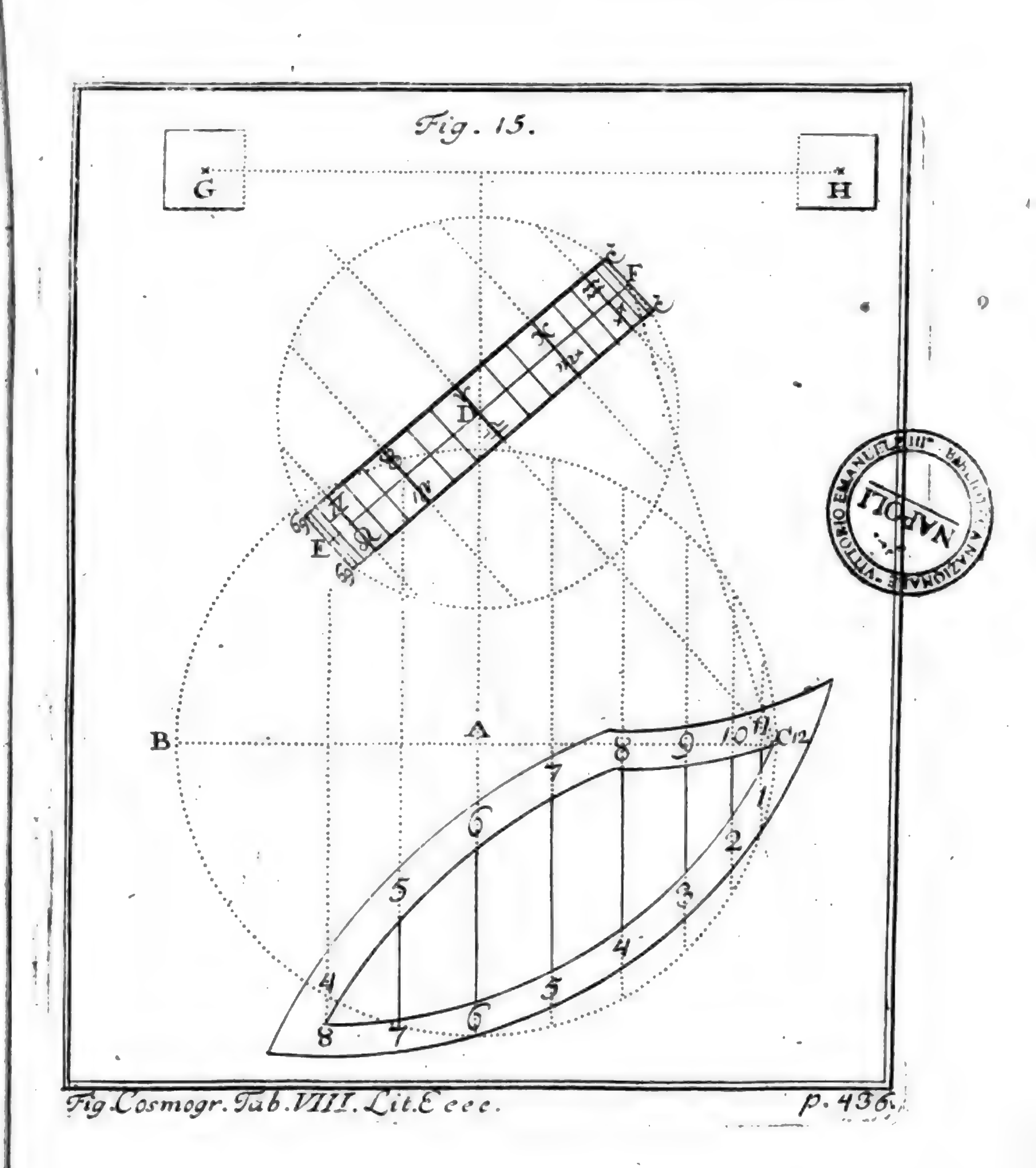


Fig. Cosmogr. Tab. VII. Lit. D ddd. p. 436.

BIBLIOT. NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google



VITTORIO EMANUELE III° BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI
Fig. Cosmogr. Tab. VIII. Lit. E eee.
p. 436.

Digitized by Google

Fautes à corriger dans la Coſmographie.

Pag.	404.	*l.* 12.	celles-ici	*Liſez*	celles-ci
p.	408.	*l.* 3.	repporter		rapporter
	ib.	*l.* 14	di *effacez.*		
p.	413.	*l.* 28.	Antartique	*Liſez*	Antarctique
p.	417.	*l.* 3.	l'Eclipſes		Eclipſes
	ib.	*l.* 22.	apparens		apparant
	ib.	*l.* 29.	grand		grandes
p.	421.	*l.* 1.	un		un peu
	ib.	*l.* 9.	♀		☉
	ib.	*l.* 10.	♁		♀
p.	422.	*l.* 10.	☾ 100.		☾ 500.
p	424.	*l.* 13.	heures ceſſe		heures, ceſſe
p.	430.	*l.* 4.	ce point		ces points
	ib.	*l.* 20.	cleui		celui
p.	431.	*l.* 15	ni		n'y
p.	433.	*l.* 3.	P la		P à la
p.	438.	*l.* 17.	meridien		diametre
	ib.	*l.* 18.	diſtance, des		diſtance des
p.	439.	*l.* 20.	Polaires		Polaire
	ib.	*l.* 29.	Solcil		Soleil
p.	445.	*l.* 30.	ven		vent

p.	448.	l. 23.	riviers	*Lisez*	rivieres
p.	459.	l. 18.	& Suiv.		& ſuiv.
p.	463.	l. 5.	Braban		Brabant
p.	464.	l. 17.	au		aux
p.	465	l. 16.	ſu.	*Effacez*	& tout nouvellement, &c.
	ib.	l. 27.	appartiennent	*Lisez*	appartient
p.	472.	l. 16.	dans		Dans
p.	475.	l. 27.	Portugois		Portugais
	ib.	l. 30.	Malthes		Malthe
	ib.	l. 32.	poſſeſſion		prétenſion
p.	477.	l. 31.	divers		diverſes
p.	480.	l. 15.	Bourbon,		Bourbon.
p.	486.	l. 7.	rang ,		rang.
p.	497.	l, 9.	fermés	*Lisez*	fermées.

Digitized by Google

SECTION SECONDE.

PREMIERE PARTIE.

Des Principes de la Géographie en géneral.

CHAPITRE PREMIER.

De la Figure & de la Grandeur de la Terre.

I. LA Géographie, ou la Description de la Terre est une Science, qui détermine les mesures du Globe terraquée & de ses affections, & qui nous en donne la connoissance.

II. La Terre est cette partie de l'Univers, qui est composée de terre & d'eau, & qui est destinée à l'habitation & aux usages du Genre humain.

III. Cette Terre s'appelle aussi le globe terraquée, parce que sa figure est sensiblement Spherique, ce que l'on connoît non seulement par son ombre, qui se présente toujours circulaire, lorsque dans les Eclipses elle tombe sur la Lune, mais encore parce que les objets fort élevés, desquels on approche dans la plaine présentent d'abord leurs sommets, & on les découvre de plus en plus à mesure que l'on s'en approche; le contraire arrive à mesure que l'on s'en éloigne. Et enfin on en est convaincu depuis 200 ans par la navigation. Car ceux qui poursuivent continuellement leur cours vers l'Occident revien-

nent par l'Orient & au contraire. On démontre encore que la Terre est ronde du Nord au Sud par les differentes élevations polaires, & par la difference de l'apparition continuelle des Etoiles, suivant que l'on est plus ou moins éloigné de l'un ou de l'autre Pole.

IV. La hauteur des montagnes & la dépression des vallées est si peu de chose par rapport au diametre de la Terre, qu'elles ne changent pas sensiblement sa Sphéricité. Quelques-uns ont seulement voulu conclure par le mouvement que l'on lui attribuë à l'entour de son axe, que son diamétre pris dans l'Equateur est plus grand que l'axe, & qu'ils sont même entre eux comme 578 : 577. Mais la dimension que l'on a faite de la Méridienne de l'Observatoire Royal de Paris, donnant assez à connoître que les degrés du méridien vont en diminuant depuis l'Equateur vers les Poles, on convient que l'axe de la Terre est plus grand, que le méridien de l'Equateur, & on trouve même que le diametre de l'Equateur est à l'axe ou à la distance, des Poles comme 1. à 1. $\frac{14153}{1627599}$ ou à peu près 95 à 96.

V. On trouve la grandeur de la Terre, si dans deux endroits, qui sont sous le même Méridien, & dont on connoît le plus exactement qu'il se peut la distance, on prend l'Elevation Polaire; car la difference de ces deux Elevations sera à 360. comme la distance connuë est à tout le pourtour de la terre. Après quoi il est aisé d'en trouver le Diamétre, la Surface & même la Solidité. Par les dimensions que l'on a faites en France sur un espace de 8. degrez & demi on a découvert, qu'un degré de grand Cercle fait 57060. toises. Et supposant la Terre Spherique, son Diamétre sera de 6538594 toises. On compte aussi pour 1. degré 25. lieuës communes de France; 20 lieuës de Marine, 60. lieuës d'Italie, & 15 milles d'Allemagne.

Digitized by Google

CHAPITRE SECOND.

De l'Application des Cercles de la Sphere au Globe de la Terre.

I. Puiſque l'on conçoit dans les principes de la Sphere la Terre dans le centre de l'Univers, on ſe peut imaginer ſur la Terre l'Horizon, le Méridien, l'Equateur, les Tropiques & les Polaires centralement poſés ſous ceux de l'Univers. Et puiſque nous avons vû leurs définitions, voici leur uſage ſur le Globe Terraquée. L'Equateur diviſe la Terre dans l'Hemiſphere Septentrional & l'Hemiſphere Méridional. Les deux Tropiques & les deux Polaires partagent ce Globe en 5 Bandes ou Orbes, que l'on appelle Zones. Celle qui eſt entre les deux Tropiques s'appelle Zone Torride, dans laquelle le Soleil eſt toujours vertical en quelque endroit. Celles qui ſont entre chaque Tropique & chaque Polaire ſont appellées les Zones Temperées, dont l'une eſt la Septentrionale & l'autre la Méridionale. Les habitans de ces Zones voyent toujours le Soleil à midy vers leur Pole oppoſé. Enfin les ſegmens compris dans chaque Polaires ſont appellés Zones froides. Les habitans de ces Zones ont pendant un tems de l'année le Soleil plus que 24 heures deſſus l'Horizon; mais en échange ils ne le voyent pas du-tout dans l'autre partie de l'année.

II. Ceux qui habitent ſous l'Equateur ont les jours & les nuits égales pendant toute l'année. Mais plus on va de l'Equateur vers l'un ou l'autre des Poles, plus les jours deviennent longs en Eté & courts en Hyver, juſqu'à ce que ſous les Poles le Soleil paroît pendant 6. mois de ſui-

te, & que les autres 6. mois il eſt toujours caché ſous l'Horizon. Tout ceci pourtant doit s'entendre en faiſant abſtraction de la réfraction. Ceci a donné lieu de diviſer la Terre depuis l'Equateur juſques vers l'un & l'autre Polaire par des cercles paralleles à l'Equateur de part & d'autre en 24. parties, que l'on appelle Climats. Ainſi un Climat eſt une bande ou Zone du Globe de la Terre compriſe entre deux paralleles dans lequel le plus grand jour de l'Eté croit de 30.' ou d'une demi-heure. On a fait là-deſſus des Tables, dont les unes n'ont aucun égard à la réfraction, & d'autres y font réflexion, de même qu'à la differente demeure du Soleil dans les ſignes Septentrionaux & Méridionaux.

Climat.	Longueur du jour.		Elev. Pol.		2.e Table Elev. Pol.	
	h	'	°	'	°	'
1	12	30	8	34	7	18
2	13		16	34	15	36
3	13	30	23	11	23	8
4	14		30	47	29	49
5	14	30	36	30	35	35
6	15		41	22	40	32
7	15	30	44	29	44	42
8	16		49	1	48	15
9	16	30	51	58		
10	17		54	29	53	46
11	17	30	56	37		
12	18		58	26	57	44
13	18	30	59	59		
14	19		61	18	60	39
15	19	30	62	25		

Cl.	Long.du J.		El.Pol.		2.e Ta.El.Pol.		Septen.		Mérid.	
							Jour,	Nuit.	Jour,	Nuit.
	h	'	°	'	°	'	J	J	J	J
16	20		63	22	62	24				
17	20	30	64	6						
18	21		64	46						
19	21	30	65	21						
20	22		65	47	65	10				
21	22	30	66	6						
22	23		66	20						
23	23	30	66	28						
24	24		66	31	65	54				
25	1	Mois.	67	30	66	53	31	27	30	28
26	2		69	30	69	30	62	58	60	59
27	3		73	20	73	0	93	87	89	88
28	4		77	20	78	6	124	117	120	118
29	5		84	0	84	0	156	148	140	147
30	6		90	0	90	0	188	180	178	177

La derniere partie de cette Table montre les accroissemens du jour dans les Zones froides. On y pourroit encore joindre les durations du crépuscule, pour avoir tout ce qui concerne le plus grand jour de tous les Climats. Du reste on voit du premier coup, que la largeur des Climats diminuë à mesure qu'ils approchent des Polaires.

III. Si de degré en degré on tire des paralleles à l'Equateur, on aura les Cercles de Latitude. Il est évident que ces Cercles vont toujours en diminuant jusque vers les Poles. On trouve aisément quel est le rapport entre chacun de ces Cercles & l'Equateur. Car soit EQ l'Equa- *Fig. 16.* teur, le Cercle PA un parallele proposé; l'Equateur sera à ce parallele comme le rayon CQ est au rayon AX.

Digitized by Google

Mais AC eſt égal à CQ, & conſiderant le triangle ACS, la ligne AX ſera le ſinus du complement de l'angle ACS, c'eſt-à-dire, de la Latitude ACQ. Ainſi un degré de l'Equateur ſera à un degré du parallele propoſé, comme le ſinus total eſt au ſinus du complément de la Latitude de ce même parallele. C'eſt par ce moyen que l'on a conſtruit la Table de la valeur d'un degré de chaque parallele depuis l'Equateur juſqu'au Pole.

°	'	''									
1	59	59	24	54	48	47	40	55	70	20	31
2	59	58	25	54	22	48	40	8	71	19	32
3	59	55	26	53	55	49	39	21	72	18	32
4	59	51	27	53	27	50	38	34	73	17	32
5	59	46	28	52	58	51	37	45	74	16	32
6	59	40	29	52	28	52	36	56	75	15	31
7	59	33	30	51	57	53	36	6	76	14	30
8	59	24	31	51	25	54	35	16	77	13	29
9	59	15	32	50	53	55	34	24	78	12	28
10	59	5	33	50	19	56	33	33	79	11	26
11	58	53	34	49	44	57	32	40	80	10	25
12	58	41	35	49	9	58	31	47	81	9	23
13	58	27	36	48	31	59	30	54	82	8	21
14	58	13	37	47	55	60	30	0	83	7	18
15	57	57	38	47	16	61	29	5	84	6	16
16	57	40	39	46	37	62	28	10	85	5	13
17	57	22	40	45	57	63	27	14	86	4	11
18	57	3	41	45	16	64	26	18	87	3	8
19	56	44	42	44	35	65	25	21	88	2	5
20	56	23	43	43	52	66	24	24	89	1	2
21	56	1	44	43	9	67	23	26	90	0	0
22	55	38	45	42	25	68	22	28			
23	55	13	46	41	40	69	21	30			

Digitized by Google

Dans cette Table les valeurs du degré de chaque Parallele font exprimées en minutes & fecondes. Mais il eft aifé de réduire ces valeurs en lieuës ou autres mefures telles que l'on veut, par exemple, un degré de l'Equateur fait 20 lieuës de marine, on veut fçavoir combien fait un degré du Parallele de 48°. Puifque dans la Table on trouve 40'. 8''. on n'a qu'à inferer 60' : 20L = 40' 8'', ou en abrégeant 3 : 1 = 40', 8''; ainfi prenant le tiers de 40', 8'' on aura 13 lieuës & 22' de lieuë. Cette Table eft néceffaire pour la conftruction des Cartes de Geographie, & elle fert à connoître les lieuës de Longitude dans la Navigation.

IV. Parmi les habitans de la Terre, qui font fous le même Méridien, on trouve les differences fuivantes: 1°. Ceux qui nous font oppofés diametralement font appellés Antipodes, parce qu'ils tournent les pieds contre nous. 2.° Ceux qui demeurent de l'autre côté de l'Equateur à la même Latitude que nous, s'appellent Antoeciens, parce qu'ils font vis-à-vis de nous. 3.° Ceux qui demeurent dans notre même Parallele, où il coupe l'autre moitié du Meridien s'appellent Perioeciens. Il paroît aifément que nos Antoeciens & même tous ceux qui demeurent fous la moitié de ce Méridien, depuis un Pole à l'autre ont midi dans le même inftant avec nous; ainfi nous comptons les mêmes heures. Mais les Antipodes & les Perioeciens ont midi lorfque nous avons minuit, & ainfi du refte. Ainfi les habitans fous l'Equateur n'ont point d'Antoeciens & leurs Perioeciens font les mêmes avec leurs Antipodes. Ceux qui font fous l'un ou l'autre Pole n'ont point de Periœciens, & leurs Antœciens font en même tems leurs Antipodes.

V. Il fuit de ceci, que ceux qui demeurent fous d'au-

tres Méridiens, ne comptent pas les mêmes heures avec nous. Ainsi ceux qui demeurent plus vers l'Occident auront midy après nous, au lieu que ceux qui demeurent vers l'Orient à notre égard ont déja leur midy avant que le Soleil paroisse à notre Méridien. Cette difference est la difference des Longitudes. Car puisque la révolution journaliere de la Sphere ne nous donne pas un point fixe & notable, auquel on se puisse rapporter; il faut se servir de cette difference de tems pour déterminer en degrés de l'Equateur combien un endroit est plus Oriental ou plus Occidental que l'autre; après quoi on détermine le premier Méridien arbitrairement, & on y rapporte les Longitudes des lieux de la Terre. On découvre cette difference des Longitudes, si on compare les tems des Eclipses de la Lune ou bien ceux des Immersions ou des Emersions des Satellites de Jupiter que l'on à observé dans deux ou plusieurs endroits à la fois. Si on pouvoit transporter des pendules ou autres instrumens, qui mesurent le tems exactement, sans que leur mouvement en fût troublé, on trouveroit aisément la Longitude par terre & par mer. La même chose arriveroit encore, si on sçavoit exactement la théorie de la Lune.

VI. La Latitude se trouve assez exactement par la hauteur méridienne du Soleil, si on sçait sa Déclinaison au tems de l'observation. Car on trouve par là l'élevation de l'Equateur, dont le complément à 90°. est la Latitude cherchée. On la trouve encore par les Etoiles Car si on prend la plus grande & la plus petite hauteur de l'une de celles, qui sont de perpétuelle apparition, c'est-à-dire, que l'on la prend précisément lorsqu'une telle Etoile passe par le Méridien, la moitié de la somme de ces deux hauteurs, qu'il faut auparavant corriger par rapport à la réfraction, donnera l'élevation Polaire.

Digitized by Google

VII. De ce qui est dit ci-dessus il nait une autre division des habitans de la Terre par rapport à leurs ombres. Ainsi on appelle Asciens ceux qui une ou deux fois l'année ne jettent leur ombre méridienne d'aucun côté. Cela arrive à ceux qui demeurent dans la Zone Torride; car ils ont une ou deux fois l'année le Soleil vertical. Ceux d'entre eux, qui ne demeurent pas précisément dans les Tropiques sont Amphisciens, parce qu'en un tems ils jettent leur ombre méridienne vers le Nord & un autre tems vers le Sud. Ceux qui habitent l'une & l'autre Zone Temperée s'appellent Héterosciens, parce qu'ils jettent constamment leur ombre méridienne vers le même Pole. Soûs les Poles & auprès il arrive que l'ombre des corps tourne à la ronde tout le tems que le Soleil ne s'y couche pas; c'est pourquoi on nomme ces habitans Perisciens.

VIII. Les quatres Saisons de l'année arrivent suivant que le Soleil méridien est plus on moins éloigné du Zénith. Ainsi dans notre Zone temperée, & même dans la Zone froide Septentrionale nous avons l'Eté lorsque le Soleil est au 0 ♋, & l'Hyver, lorsqu'il est au 0 ♑, le Printems & l'Automne arrivent dans la distance moyenne, c'est-à-dire, au 0 ♈ & au 0 ♎. Dans les Zones méridionalles c'est tout le contraire. Subtilement parlant on pourroit dire, que les Amphisciens ont deux Etés, un ou deux Hyvers, un ou deux Printems, une ou deux Automnes; ce qui est aisé à comprendre par la Sphere.

IX. On rapporte à l'Horizon les 32 plages, que l'on appelle aussi en terme de marine Route ou Rumbs de ven. Et puisque le premier principe de leur déterminatiton de même que des Cadrans solaires est la Ligne méridienne; voici la méthode dont on se sert pour la tra-

cer sur un plan horizontal. On décrit d'un point pris à discretion sur un tel plan immobile, qui doit être éxposé avant & après midy au Soleil, plusieurs cercles. Ensuite érigeant un stile ou un gnomon perpendiculaire sur ce centre on marque les points de ces Cercles où l'ombre du sommet du stile passe le matin; après quoi marquant aussi les points où cette même ombre passe après midy, si on joint les points de chaque cercle par des lignes droites, qui doivent être paralleles, & que l'on divise toutes ces lignes en deux également par une ligne qui y soit perpendiculaire; cette même ligne sera la méridienne que l'on cherche. Il est bon de faire cette operation dans un tems ou la Déclinaison du Soleil ne change pas notablement du matin au soir. On se sert de plusieurs cercles pour prévenir la faute qui se pourroit commettre dans une seule operation.

CHAPITRE TROISIEME.

Du Globe Terrestre & des Cartes de Géographie.

I. LE Globe Terrestre est une représentation proportionée des parties du Globe Terraquée, & des Cercles que nous y concevons. Il est suspendu librement dans un Horizon & un Méridien, auquel on ajoûte un Cycle horaire; moyennant quoi & un quart de cercle, que l'on y peut appliquer differemment, on rend toutes les affections du Globe terraquée sensibles.

II. On représente l'Ecliptique sur le Globe Terrestre; quoique ce Cercle ne laisse pas une trace constante sur le Globe de la Terre dans la révolution journaliere de la Sphere.

III. On réſoud moyennant le Globe Terreſtre preſque tous les Problêmes, qui concernent la Latitude, la Longitude, la diſtance des lieux de la Terre, la hauteur du Soleil ou des autres Planêtes pour un lieu & un tems donné, la Longueur du jour & de la nuit, la durée du Crépuſcule, les Saiſons de l'année d'un lieu donné, ſes Antœciens, Periœciens & Antipodes, Les Aſciens, Amphiſciens, Heteroſciens & Periſciens. On y voit même au Soleil à toute heure la partie illuminée de la Terre & celle où il fait nuit. Et on peut déterminer quelle heure il eſt en quelque lieu de la Terre que l'on veut, l'heure qu'il eſt en un lieu étant donnée, &c.

IV. Les Cartes de Géographie ſont des repréſentations du Globe Terraquée ou de quelqu'une de ſes parties ſur un plan. Les premieres s'appellent des Mappemondes. On les conſtruit ordinairement comme ſi l'œil ſe trouvoit dans l'un & l'autre Pole du premier Méridien. Ainſi les parties qui ſont dans le milieu ſont bien plus petites que celles qui ſont dans les extrémités. On y joint quelquefois des parties qui ont l'un & l'autre Pole pour centre. Du reſte on obſerve régulierement à toutes les Cartes de Géographie, que la partie d'enhaut regarde le Septentrion & celle qui eſt à main droite l'Orient, &c. à moins que la ſituation du Païs n'oblige à quelque irrégularité. Les Cartes ſont ou Géographiques ou Chorographiques, ou Topographiques, ſuivant qu'elles repréſentent un plus grand, moyen ou petit terrein.

V. Les Cartes ſur leſquelles on repréſente les grandes parties de la Terre ſont ordinairement conſtruites enſorte que les Cercles de Latitude décroiſſent à proportion ſuivant la Table donnée ci-deſſus. Ces Paralleles ſont repréſentés quelquefois comme des lignes droites, quelquefois ce ſont des arcs de differens Cer-

Digitized by Google

cles, comme auſſi les Cercles de Longitude. Sur ces ſortes de Cartes on trouve les diſtances des lieux plûtôt en éſtimant qu'en meſurant avec le compas.

VI. Lorſque l'on ne veut repréſenter qu'une moindre partie du Globe Terraquée ſur une Carte, on ſe contente de régler les degrés de Longitude & les deux Paralleles entre leſquels le païs, que l'on repréſente, eſt ſitué, conformement à la Table des Paralleles. Après quoi tous les Cercles tant de Latitude que de Longitude dégenerent en lignes droites. Les degrés qui ſont dans le cadre à droite & à gauche ſont égaux entre eux ; & parce qu'ils ſont parties d'un grand Cercle, on s'en ſert pour meſurer les diſtances.

VII. Les Cartes particulieres, qui ne contiennent qu'un terrein, dont les Latitudes extrémes ne different pas conſiderablement, ſe levent & ſe rapportent ſur le papier comme les plans Géometriques, & ſi l'étenduë en vaut la peine, on y joint un bord, qui donne les degrés tant de Latitude que de Longitude.

VIII. L'uſage des Cartes de Géographie conſiſte à donner non ſeulement la diſtance des lieux, leurs Longitudes, leurs Latitudes, & les plages de leurs ſituations mutuelles, les mers, les riviers, &c. mais les plus particulieres, telles que ſont les Topographiques, deſcendent dans un détail, qui fait connoître d'un coup d'œil les circonſtances les plus remarquables d'un païs dont il eſt queſtion.

CHAP-

CHAPITRE QUATRIEME.
De la Direction du Cours des Navires dans la Mer.

I. ON conduit les Vaiſſeaux en Mer par le moyen de la bouſſole, & ſelon les Cartes marines. La bouſſole eſt compoſée d'une roſe de vents, qui contient les 32. rumbs ou plages, & d'une aiguille aimantée. Cette aiguille tournant toujours un de ſes bouts vers le Nord, on met par ſon moyen la prouë du vaiſſeau vers la plage où eſt ſitué l'endroit vers lequel on tend. C'eſt-là ce que l'on appelle mettre le Cap. Cependant on remarque qu'il n'y a que peu d'endroits où cette aiguille ne décline de la ligne méridienne vers l'Eſt ou vers l'Oüeſt, & cette déclinaiſon change même avec le tems. Ainſi il faut corriger les Rumbs que l'on obſerve à la bouſſole par cette déclinaiſon pour rendre les obſervations plus exactes. On la découvre ſans ligne méridienne, ſi deux fois le même jour on prend la même hauteur du Soleil, remarquant dant quel rumb le Soleil ſe trouve aux deux obſervations. Car le milieu de ces deux rumbs donnera la ligne méridienne. De nuit on peut ſe ſervir de la hauteur de quelque Etoile pour ce même effet. Si on ſçait la Latitude du lieu où l'on eſt, on prend le rumb du lever ou du coucher d'une Etoile dont on connoît la ſituation, & par conſéquent l'amplitude ſur l'Horizon ; cependant cette obſervation doit être corrigée par la réfraction.

II. Si on va droit du Nord au Sud ou au contraire, la difference des Latitudes fera toujours connoître le chemin que l'on a fait. On trouve cette Latitude lorſqu'avec un quart de Cercle, ou autre inſtrument, on prend la hau-

teur méridienne du Soleil. Car la déclinaiſon du Soleil pour ce jour-là étant connuë, le reſte s'en ſuit aiſément. Lorſque le cours va droit à l'Eſt ou à l'Oüeſt, le vaiſſeau décrit l'arc d'un cercle parallele à l'Equateur; car ſa route, qui s'appelle Sillage, coupera tous les Méridiens où elle paſſe à angles droits. On voit par-là que la continuation de cette plage n'eſt pas la même choſe que le premier vertical. Car celui-ci coupe les differens Méridiens ſous d'autres angles, à moins que ce ne ſoit ſous l'Equateur. Les courſes qui ſe font ſelon les quatre plages principales s'appellent Orthodromie.

III. Lorſque le cours d'un vaiſſeau eſt dirigé ſelon une plage collaterale, la ligne de ſon Sillage coupe encore tous les Méridiens qu'elle paſſe, ſous le même angle. Par conſéquent elle ſe détourne du Vertical de ce rumb en formant une ſpirale, qui tourne finalement à l'entour de l'un ou de l'autre Pole du monde. On appelle cette ligne Loxodromie ou Cours oblique. Ainſi un vaiſſeau dont la courſe eſt dirigée ſelon l'Azimuth du Vertical qui paſſe par le lieu où il tend, s'en détournera toujours plus vers le Pole voiſin.

Fig. 17. IV. Si les Méridiens PA, PB, PC, PD, par leſquels la Loxodromie AEFG paſſe, ne ſont que peu diſtants, & que l'on partage le changement de Latitude GD ou KA en parties égales, les paralleles MN, LH, KG partageront la Loxodromie en parties égales. Car les angles Loxodromiques PAE, PEF, PFG ſont égaux; par conſéquent leurs complémens à un droit le ſeront auſſi. Ainſi les triangles rectangles AEB, EFI, FGH ſont ſemblables & égaux, parce que les côtés EB, FI, GH ſont égaux; donc les hypoténuſes le ſeront auſſi. Mais les côtés AB, EI, FH qui ſont égaux entr'eux, ne ſont pas

les mêmes parties de leurs Cercles ; ainsi la somme de ces arcs n'est pas égale à la difference de Longitude entre les lieux A & G. Si on réduit ces arcs en lieuës le total est ce que l'on appelle les lieuës de Longitude.

V. On tire de ceci les théorêmes suivans : Que la longueur de la Loxodromie ou le chemin AG est au changement de Latitude GD comme le Sinus Total est au Sinus de complement de l'angle Loxodromique. Que le chemin AG est à la somme des lieuës de Longitude AB + EI + FH, comme le Sinus Total est au Sinus de l'angle Loxodromique. Que le changement de Latitude GD est à la somme des lieuës de Longitude, comme le Sinus total est à la Tangente de l'angle Loxodromique. Et qu'enfin le total des lieuës de Longitude est moyen proportionel entre la somme du chemin & du changement de Latitude & leur difference, car $\overline{AE}^2 - \overline{EB}^2 = \overline{AB}^2$. Donc $AE + EB : AB = AB : AE - EB$, &c. C'est sur ce fondement que l'on à construit les tables Loxodromiques, qui montrent de 10' en 10' de Latitude les changemens de Longitude & le chemin parcouru dans chaque Rumb.

VI. On est souvent obligé de prendre hauteur sur mer, c'est-à-dire, d'observer la Latitude où on est. Outre ce que nous en avons dit déja, on aime à se servir sur Mer de l'Etoile Polaire, que l'on sçait être dans le Méridien, lorsque la premiere de la queuë de la grande Ourse, & la deuxieme de la cuisse de Cassiopée se trouvent dans le même à-plomb Celle de la grande Ourse étant en haut l'Etoile Polaire sera audessous du Pole, & au contraire. La distance entre le Pole & l'Etoile Polaire est à présent de 2°. 11'

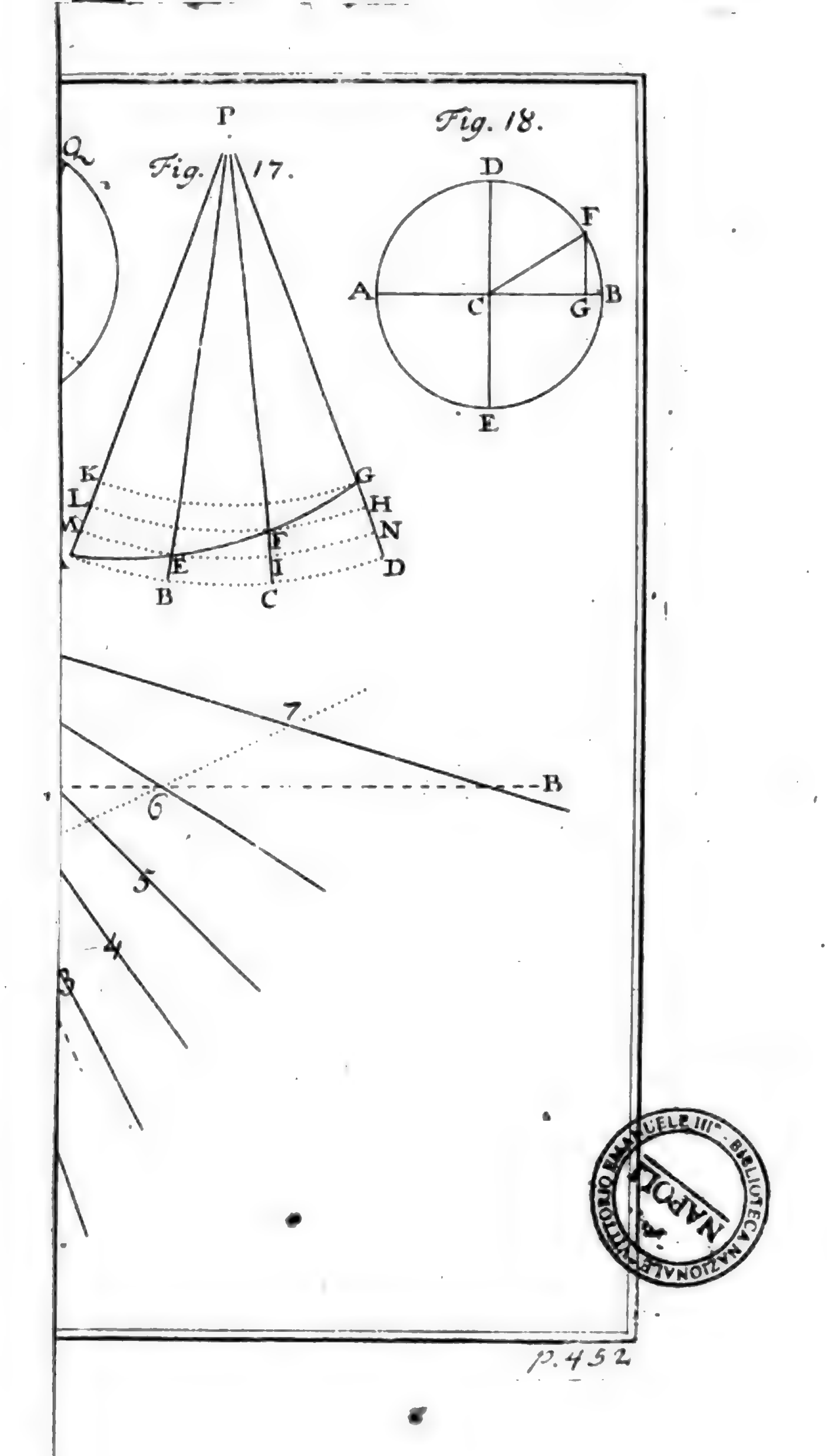
VII. On trouve encore la hauteur du Pole en prenant

Fig. 18. en tout tems la hauteur de l'Etoile Polaire, ou telle autre, pourvû que l'on remarque dans quel Rumb elle paroît. Car l'Etoile décrivant à l'entour du Pole C le cercle BDAE, si elle se trouve en F, l'angle DCF sera l'inclinaison de son Rumb, & FG sera son Sinus du complément. Donc le sinus total sera au sinus du complément de l'angle DCF, comme CF distance entre l'Etoile & le Pole est à FG difference entre la hauteur de l'Etoile & celle du Pole.

VIII. On trouve encore la Latitude par le moyen de deux Etoiles, qui sont dans le même tems sur l'Horizon, ou par le tems qui se trouve entre le lever de deux Etoiles ou leur coucher; ou bien connoissant les plages du lever ou du coucher de deux Etoiles; ou bien connoissant la plage dans laquelle une Etoile se leve; ou enfin par la hauteur du Soleil & sa déclinaison à un tems donné. Ces problêmes se doivent résoudre par la Trigonométrie Spherique & les difficultés, qui se trouvent pour avoir au juste les choses données, font que l'on n'en vient là qu'au défaut d'autres expédiens.

IX. Parmi les differentes méthodes que l'on a inventé pour déterminer la quantité du chemin que l'on a fait en Mer, & dont il y en a d'impraticables, on se sert de la suivante, qui cependant ne laisse pas que d'être fort douteuse. On attache le Lok, qui est un petit vaisseau rempli de plomb, à un cordon divisé en 700 brassées de corde roulées sur un tourniquet, affermi à la Poupe du navire; puis descendant le petit vaisseau dans l'eau après environ 20 brassées dévelopées on tourne un sablier d'une demi-minute ou 30″. On compte les nœuds du cordon, qui se dévelope pendant l'écoulement du sablier; & ce nombre de nœuds multiplié par 120 donnera le chemin que le Navire a fait dans une heure. On réïtere cette ope-

Digitized by Google



VITTORIO EMANUELE III · BIBLIOTECA NAZIONALE · NAPOLI

ration tânt de fois qu'il paroît du changement à la viteſſe du Navire pour en conjecturer ou eſtimer la quantité du chemin.

X. Tous les moyens que l'on a cherché juſqu'ici n'ayant pas réuſſi pour trouver la Longitude en Mer, voici comme on s'y prend pour en approcher. Premierement on eſtime le chemin que l'on a fait depuis le lieu d'où l'on eſt parti ; enſuite on prend la Latitude du lieu où on ſe trouve pour avoir le changement de Latitude de la courſe. Enſuite on cherche les lieuës de Longitude, que l'on peut trouver auſſi par le moyen de l'angle Loxodromique ſans prendre la Latitude. D'où on infere enfin à la difference des Longitudes. Mais l'eſtime du chemin eſt incertaine & le Rumb peu sûr à cauſe de la déclinaiſon de l'aiguille.

XI. Les Cartes marines ſont de trois ſortes. Les unes ſont appellées plates ou au point plat, ou au point commun, lorſque les Méridiens ſont repréſentés comme des lignes droites paralleles, & que les Cercles paralleles les coupent à angles droits, les degrés de ces paralleles & des Méridiens étant égaux. Dans ces ſortes de Cartes les lignes Loxodromiques ſe préſentent comme des lignes droites. Les Cartes réduites ſont de deux ſortes ; les unes repréſentent les Méridiens comme des lignes droites, qui vont en s'uniſſant vers le Pole, & les paralleles ſont des lignes droites ; ainſi leur conſtruction eſt la même avec les Cartes Géographiques rectilignes. Mais puiſque les Méridiens & les Paralleles ne ſe coupent point à angles droits, elles ne ſervent pas aſſez bien pour la navigation. Ainſi on a penſé à une autre conſtruction, qui ſe fait par les Latitudes croiſſantes. Ces Cartes réduites repréſentent tous les Méridiens paralleles entr'eux ; mais leurs

degrés de Latitude vont en croissant depuis l'Equateur vers le Pole, à proportion de ce que les Paralleles décroissent sur le Globe, ou ce qui est la même chose à proportion des Sécantes des degrés de Latitude. Par conséquent les lignes Loxodromiques y paroissent droites; mais les distances se doivent mesurer par parties selon les degrés de Latitude où elles se trouvent. Enfin il y a une troisiéme sorte de Carte marine, dont on se sert principalement sur la Mer Méditerranée, qui n'est construite que d'une maniere pratique par les Rumbs & les distances.

XII. On se sert assez bien des Cartes plates pour les petits voyages; c'est ce que l'on appelle naviguer sur le plat. Mais les voyages de long cours se réglent selon la Carte réduite des Latitudes croissantes; & c'est ce qu'on appelle naviguer sur le réduit, ou naviguer sur le rond. Dans ce cas la Longitude & la Latitude des deux termes étant données on trouve le Rumb par la seule application de la Boussole sur le Méridien de l'endroit d'où on part. On le trouve aussi par les tables Loxodromiques. Le Rumb & le chemin qu'on a fait étant donnés, on trouve encore de cette même maniere la Longitude & la Latitude de l'endroit où on est. La Latitude des deux termes & le Rumb étant donnés on trouve aussi le chemin & la difference des Longitudes. Les Latitudes des deux termes & la quantité du chemin étant donnés on trouve de même le Rumb & la difference des Longitudes. La difference de Longitude, la Latitude d'un terme & le chemin étant donné, on trouve le Rumb & la Latitude de l'autre terme. Enfin la difference des Longitudes, la Latitude d'un terme & le Rumb étant donnés, on trouve la quantité du chemin & la Latitude de l'autre. Tous ces Problêmes de Navigation se peuvent résoudre

ou par la ſeule Carte réduite & la bouſſole, ou par les tables Loxodromiques. On pourroit les réſoudre par la Trigonometrie Spherique, ſi la courſe au lieu de ſuivre la ligne Loxodromique ſe faiſoit dans un arc de grand Cercle. Mais il naîtroit dans ce cas des difficultés, qui font que l'on préfere la premiere méthode des Loxodromies.

SECTION SECONDE.
SECONDE PARTIE.
Des parties du Globe Terraquée en particulier.

CHAPITRE PREMIER.
Des parties naturelles du Globe Terraquée & de leurs Noms.

I.

LEs parties naturelles du Globe Terraquée ſont ou ſolides ou fluides. Les parties ſolides ſont ce qu'on appelle Terre.

II. Le Continent ou terre ferme eſt une très-grande partie de terre continuë, quoique finalement elle ſe trouve environnée d'eau. Ainſi l'Europe, l'Aſie & l'Afrique priſes enſemble font un Continent, que l'on appelloit autrefois le monde. L'Amérique eſt un autre Continent, que l'on appelle le nouveau monde; parce que l'on ne l'a découvert que depuis 1492. On a fait même quelques découvertes, qui font juger qu'il y a encore un grand

Continent du côté du Pole Antarctique, que l'on appelle Terre du Sud.

III. Une Isle est une terre moindre, qui est toute environnée d'eau. Il y en a qui contiennent jusqu'à un ou deux Royaumes, comme les Isles Britanniques.

IV. Les bords des terres du côté de la Mer s'appellent côtes ou rivages. Côte saine est celle qui est sans roches ou danger. Plattain est une côte plate. Estrain, quand elle est sabloneuse. Les laisses ou relais sont les terres, que la mer a laissées au rivage. La grève est la partie de la côte que la Mer couvre & découvre par son flux & son reflux. Les Falaises sont des côtes escarpées. Les Dunes sont des élevations de sable au bord de la mer. Les Bancs, basses ou sirtes sont des roches ou sables cachés sous l'eau.

V. Presqu'Isle ou Chersonese est une terre qui ne tient au Continent que par un endroit, le reste étant environné de la mer.

VI. L'Isthme est une langue de terre entre deux mers, qui communique d'un Pays à l'autre.

VII. Le Cap ou Promontoire est une hauteur qui s'avance dans la mer. On l'appelle aussi Chef, Tête, Point, Bec, &c. Les noms des autres parties solides sont trop connus pour en faire des descriptions superfluës.

VIII. Les parties fluides sont la grande Mer ou l'Océan, qui est la mer qui environne les grands Continens de la Terre. On lui donne differens noms selon les circonstances des terres où il se trouve, ou selon quelque autre affection.

IX. Les Golfes sont des parties de la mer, qui n'y ont ordinairement communication que par une ouverture, que l'on appelle Détroit, le reste étant environné de terres. On les

Digitized by

On les appelle auſſi Seins. Les grands Golfes prennent le nom de mer; comme la mer Mediterranée, la mer rouge, &c. Il y a des Golfes impropres, qui ſont fort ouverts du côté de la mer; comme le Golfe de Bengale. Les petits Golfes s'appellent Bayes.

X. L'Archipel eſt une petite mer, qui eſt parſemée de pluſieurs Isles.

XI. La Rade, que l'on appelle auſſi moüillage & Anchrage, eſt une partie de mer près des côtes, propre à jetter l'Ancre.

XII. On remarque dans la mer un Mouvement general d'Orient en Occident, particulierement dans la Zone Torride. De plus un journalier, cauſé principalement par la preſſion de la Lune, qui fait le flux & le reflux; il eſt plus grand aux Equinoxes, & dans les pleines & nouvelles Lunes que dans les quarts, où la Lune eſt plus loin de la Terre. Et enfin il y a un mouvement irrégulier cauſé par les vents & les tempêtes.

XIII. Les Lacs & les étangs ſont de grands amas la plûpart d'eau douce. Les plus grands prennent le nom de mer, comme la mer Caſpienne. Les moyens ſe nomment Lacs, comme le Lac de Geneve, &c.

XIV. Les fleuves, rivieres, & ruiſſeaux different ordinairement par leur grandeur. Les premiers portent leur nom juſqu'à la mer. Les rivieres portent batteaux. Tous ont des ſources conſtantes.

CHAPITRE SECOND.

De la Division Politique de la Terre.

I. LEs differentes Puissances Souveraines, qui sont établies parmi les hommes, pour les gouverner & les contenir en ordre, ont differens titres pour marque de leur Autorité. C'est de-là que sont venus les noms d'Empire, Royaume, Principauté & République. Dans les premiers la souveraine Puissance, qui ne reconnoît que Dieu pour Supérieur, réside dans une seule personne, à qui elle est échuë ou par succession ou par élection. Dans les Républiques elle réside dans toute une Assemblée.

II. Les grandes parties des Continens ont donné une division naturelle de la Terre en quatre parties, qui sont l'Europe, l'Asie, l'Afrique & l'Amerique. La terre du Sud & une autre vers le Nord ne sont pas encore assez connuës.

III. Les Royaumes & Etats Souverains de l'Europe selon l'ordre qu'ils se présentent sur la Carte sont les suivans:

I. Le Portugal, qui est divisé en six Provinces & le Royaume d'Algarbe. La résidence est Lisbone. Il tient en Asie Goa & Malacco; les Portugais de l'Isle de Maccao sont soumis à la Chine. En Afrique la Guinée, l'Isle de St. Thomas, Mozambique & Guiloa. En Amérique les Isles Azores & le Bresil. Réligion Cath. R. Ce Royaume fut commencé par Henry C. de Besançon, qui chassa les Mores & épousa la Fille d'Alphonse VI. Roy de Castille; il subsista seul jusques en 1580. qu'il fut joint à l'Espagne. Philippe II. III. IV. le tinrent. Mais en 1640. il se sépara, & Jean Duc de Braganze fut élû Roy.

II. L'Espagne contient douze tant Royaumes que Pro-

Digitized by Google

vinces, qui ſont le R. de Caſtille tant Ancienne que Nouvelle, le R. de Leon, le R. de Galice, l'Aſturie, la Biſcaye, le R. de Navarre, le R. d'Arragon, le R. de Valence, le R. de Murcie, le R. de Grenade, le R. d'Andalouſie, la Catalogne. Les Isles adjacentes Majorques, Minorques & Jvica y appartiennent auſſi. Du tems de la décadence de l'Empire Romain les Goths s'emparerent de l'Eſpagne. Rodric en fut chaſſé par les Mores en 713. Après quoi les Chrétiens la reconquirent ſucceſſivement. Ainſi elle contenoit autrefois les quatre Royaumes, qui ſont la Caſtille, la Navarre, l'Arragon & la Grenade. Mais Ferdinand le Cath. unit la Caſtille & l'Arragon par ſon mariage avec Iſabelle; il conquit le R. de Grenade en 1492. & s'empara de la Navarre en 1514. le Portugal y fut joint en 1580. La Sicile étoit déja occupée en 1283. par Pierre, Roy d'Arragon. Ferdinand le Cath. y ajoûta enfin le Royaume de Naples vers l'an 1510. l'Amérique fut découverte & acquiſe en 1492. & Suiv. & les Isles Philippines en 1519. La ſucceſſion de Bourgogne, qui comprenoit auſſi les Pays-Bas tomba en 1482. à Philippe I. d'Autriche, qui étoit marié avec Jeanne, Fille de Ferdinand le Cath. Son Fils Charles V. l'Empereur confera le Duché de Milan à Philippe II. ſon Fils & ſucceſſeur dans la Monarchie d'Eſpagne. En 1581. les Provinces unies des Pays-Bas s'en ſéparerent; le Portugal en fit autant en 1640. la Bourgogne & une partie des Pays-Bas furent conquis par la France. Et enfin la ſucceſſion de cette Monarchie étant échuë à Philippe V. le R. de Naples, le Duché de Milan & les Pays-Bas Catholiques furent ſous le pouvoir de la Maiſon d'Autriche, laquelle tenoit auſſi le R. de Sicile, qui étoit cédé en 1713 au Duc de Savoye. La Réligion eſt Cath. R.

III. La France contient 17. Gouvernemens ou Provinces, qui ſont la Picardie, la Champagne, l'Isle de France, la Normandie, la Bretagne, l'Orleanois, la Bourgogne, le Lionnois, la Guienne, le Dauphiné, la Provence, le Languedoc, les Pays-Bas, la Lorraine, la Franche-Comté l'Alſace & le Rouſſillon; aujourd'hui on lui donne 37. Gouvernemens Militaires. Ce Royaume étoit autrefois une dépendance de l'Empire Romain. Enſuite les Goths s'y établirent en 414. du côté de Narbonne. Les Bourguignons en firent autant du côté d'Arles. Enfin les Francs les vainquirent les uns après les autres. Ils y entrerent ſous le commandement de Pharamond environ l'an 420. Depuis ce tems-là ce Royaume fut gouverné par la race des Mérovingiens, qui dura juſqu'à Childeric. La race des Carolovingiens commença par Pepin, Pere de Charlemagne en 750. & dura juſqu'à Louis V. en 986. Enfin la deſcendance de Hugües Capet gouverne juſqu'à préſent. Après la défaillance de la premiere ligne directe Philippe de Valois ſucceda à Charles le Bel en 1328. Cette branche ſuccomba aux Anglois ſous le Roy Jean & Charles VI. & elle les vainquit ſous Charles VII. Enfin Henry III. étant mort en 1590 ſans deſcendance, Henry IV à qui appartenoit le Royaume de Navarre, transfera la Couronne de France dans la branche de Bourbon. La France tient en Amérique le Canada & le Miſſiſſipi; la Réligion du Royaume eſt la Catholique.

IV. L'Allemagne eſt un pays composé de pluſieurs Etats libres; qui joints enſemble forment le Corps de l'Empire. Le Chef porte le titre d'Empereur, depuis que le droit, que Charle-magne avoit acquis ſur l'Italie, eſt dévolu aux Succeſſeurs de la Couronne d'Allemagne. Cette ſucceſſion eſt élective de ſa nature. Les Etats de l'Allemagne

ſont diviſés en trois Claſſes ou Colléges ; le premier eſt celui des Electeurs, le ſecond celui des Princes, & le troiſiéme celui des Villes libres & Impériales. Ils s'aſſemblent à la Diette de l'Empire. La Réligion y eſt mêlée. Elle y forme les deux Corps, qui ſont le Catholique Rom. & l'Evangelique. La poſſeſſion des Egliſes & des Biens Eccléſiaſtiques ſe régle ſur le 1. Janvier 1624. Au Palatinat du Rhin, ce terme eſt l'année 1618. Du reſte toute l'Allemagne eſt diviſée depuis Maximilien I. en dix Cercles, qui ſont celui d'Autriche, celui de Baviere, celui de Suabe, le Supérieur & l'Inférieur du Rhin, celui de Weſtphalie, le Supérieur & l'Inférieur de Saxe, celui de Franconie & celui de Bourgogne. Chacun a ſon Colonel ou Commandant & deux Directeurs, qui ſont les plus conſiderables du Cercle ; ils ont en vûë le maintien du repos public, & les exécutions des Sentences renduës contre les Immédiats, ſoit par le Conſeil Aulique de l'Empereur, ou par la Chambre Impériale, qui réſide à préſent à Wetzlar.

V. La Suiſſe eſt compoſée de 13. Cantons, qui ſont autant de Républiques. Il y en a quatre de la Réligion Réformée, qui ſont Zurich, Berne, Bâle & Schaffhouſe, ſept Catholiques ; qui ſont Lucerne, Fribourg, Soleure, Zoug, Schvvitz, Undervvalden, Ury. Les deux autres, qui ſont Glaris & Appenzell ſont mêlés. Les Pays dépendans des Suiſſes appartiennent la plûpart à quelques Cantons, qui s'étoient alliés particulierement pour les conquerir. De plus ce Corps reconnoît pour Alliés la Ligue Griſe, le Vallais, la Ville de Geneve, la Principauté de Neuf-Chatel, l'Abbaye & Ville de St. Gall, l'Evêque de Conſtance, la Ville de Mülhauſe dans le Sundgau, Rotvvil en Suabe, & les quatre Villes Foreſtieres.

Après la mort de Rudolf II. Roy de Bourgogne, la Suisse se joignit à l'Empire d'Allemagne, où elle resta paisiblement, jusqu'à ce qu'enfin les esprits de la Noblesse & des Citoyens s'étant aigris, Rudolf I. Empereur tacha de les accorder. Mais son Fils Albert I. ayant établi des Baillifs, qui visoient à l'entiere oppression des Habitans il se forma petit à petit une ligue en Schvvitz, Ury & Undervvalden, qui commença à secoüer le joug. Lucerne y acceda, après la défaite des Imperiaux en 1332. Zurich en 1351 Berne en 1352. Glaris, Zug, Fribourg & Soleure en 1481. Bâle & Schaffouse en 1501. & Appenzell en 1513. Les Suisses eurent des guerres sanglantes avec la France, la Bourgogne & l'Empereur. Enfin ils obtinrent l'indépendance entiere de l'Empire au Traité de paix de Westphalie en 1648.

VI. Les 17. Provinces des Pays-Bas étoient autrefois sous l'Empire Romain. Après quoi les Francs, qui conquirent les Gaules s'en rendirent les maîtres. Enfin les Gouverneurs s'appropriant successivement les terres, dont ils n'avoient du commencement que l'administration, ce Pays fut divisé en 17. tant Duchés que Comtés & autres. La plûpart de ces Terres passa par succession dans la Maison des Ducs de Bourgogne, & de-là à l'Espagne. Mais du tems de Philippe II. la cruauté de Duc d'Albe, jointe à la rigueur du Tribunal de l'Inquisition nouvellement établi dans un Pays, où une bonne partie des Habitans étoit déja imbuë des principes de la Réformation, poussa une partie de ce Peuple à se mettre en défense. Ainsi sept de ces Provinces s'étant unies, & ayant trouvé de l'appuy, elles obtinrent après une guerre longue & pénible, que l'Espagne les déclara libres. Aujourd'hui une partie des dix Provinces Cath se trouve conquise par la France, le reste est à la maison d'Autriche. Voici leurs noms:

Digitized by Google

1. L'Artois, tout à la France. 2. le Hainaut, partie à la France, partie à l'Autriche. 3. Namur, à l'Autriche. 4. La Flandre, à la France, l'Isle, &c. à l'Autriche, Gand, Bruges, &c. aux Provinces-Unies Hulst, Sas de Gand, &c. 5. Le Braban à l'Autriche, Bruxelles, Louvain, &c. aux Provinces-Unies, Mastrich, Breda, Bois-le-Duc, &c. 6. Anvers 7. Malines. 8. Le Luxembourg, à l'Autriche. 9. Le Limbourg; les Provinces-Unies y ont Dalem & Wick. 10, La Gueldre, dont une partie qui comprend la ville & le bas-Bailliage de Gueldre, Wachtendonck, Kessel, &c. est cédée au Roy de Prusse; la Velau & la Betau avec la Comté de Zutphen sont des Provinces-Unies. Ainsi les 7. Provinces-Unies sont cette même Gueldre, la Hollande, la Scelande, Utrecht, Over-Yssel, Groeningue & la West-Frise. Chacune de ces 7. Provinces est une République gouvernée par ses Etats. Les affaires, qui concernent tout le Corps en géneral se traitent à la Haye par les Députés des Provinces, qui sont les Etats Generaux. Les dix Provinces autrefois Espagnoles sont toutes Cath. R. Dans les 7. Provinces-Unies la Réligion Réformée est la seule qui regne; mais toutes les autres y sont librement tolerées, ce qui y attire beaucoup de monde & de commerce. De plus ils ont en Afrique quelques Forts sur la côte de la Guinée & au Cap de Bonne-Esperance. Et en Asie ils ont presque toutes les Isles comme Java, Sumatra, les Isles Moluques & de Bandam. Ils sont aussi établis sur les côtes de Coromandel & de Malabar; de sorte qu'ils exercent presque tout le commerce de l'Asie.

VII. La Grande Bretagne contient deux grandes Isles & plusieurs petites. La plus grande comprend les deux Royaumes d'Angleterre & d'Ecosse; l'autre est l'Irlande. L'Angleterre étoit autrefois une Province de l'Empire

Romain. Les Anglo-Saxons que les Habitans avoient appellés à leur secours contre les Ecossois, s'en rendirent les maîtres vers l'année 450. Ensuite les Danois la subjuguerent. Et en 1066. Guillaume le Conquerant, Prince Normand l'acquit & la transmit à sa Postérité. Cependant les deux maisons de Yorck & de Lancaster étoient toujours en contestation jusqu'à Henry VII. Enfin après la mort de la Reine Elisabeth, la succession tomba dans la maison de Stuard, qui possedoit le Royaume d'Ecosse. Cette Maison n'étoit pas fort heureuse sur le Trône d'Angleterre. Sous le regne de la Reine Anne on a achevé de réünir les deux Royaumes d'Angleterre & d'Ecosse en un seul. L'Angleterre possede la Virginie & la Nouvelle Angleterre dans l'Amérique Septentrionale; les Isles Bermudes, la Jamaïque & la côte de Caryba. Elle a aussi quelques Forts & un commerce établi sur l'Isle de Sumatra & au côtes de Malabar aux Indes Orientales. Quoique la Royauté aît ses prérogatives en Angleterre, le Parlement a pourtant le droit de décider de plusieurs chefs importans & particulierement du recouvrement & de l'emploi des Deniers publics. La Réligion dominante en Angleterre convient assez quant aux Dogmes avec celle de Geneve. Mais quant à l'extérieur il y a quelque difference en Angleterre même. Ainsi l'Eglise Anglicane a conservé la dignité Episcopale & plusieurs céremonies, qui font la Liturgie; mais le party Presbyterien ne veut entendre ni d'Evêque ni de Liturgie. Du reste on y est assez libre pour toutes sortes de sentimens. Il n'y a que les Catholiques Romains, qui n'y ont pas toute la liberté qu'ils souhaiteroient, à cause de certains principes Ultramontains, que les Anglois n'ont point jugé convenir, soit à l'Etat ou à la Liberté.

VIII.

Digitized by Google

VIII. Le Royaume de Dannemarck & celui de Norvvegue sont joints par succession. La Suede en étoit une conquête pendant un tems. Ensuite la Famille Royale se trouvant éteinte la Couronne fut conferée par élection à la Famille d'Oldenbourg, & après celle-là à celle de Holstein-Schlesvvig. La Noblesse, le Clergé, les Bourgeois & les Paysans, qui composoient autrefois les Etats, ont conferé le pouvoir absolu au Roy en 1660. Le Royaume de Dannemarck contient la plus grande partie de la presqu'Isle, nommée Jutland, & plusieurs Isles dont les principales sont Seeland & Funen. La Norvegue est divisée en cinq Provinces ou Gouvernemens. Outre ces deux Royaumes il a tenu encore les deux grandes Isles d'Island & de Groenland. Les Isles de Schettland y appartiennent aussi, & en Allemagne la Dittmarse, Stormare, le Comté d'Oldenbourg, & tout nouvellement une partie de la Pomeranie Suedoise. Il a quelques Forts en Afrique & en Asie sur les côtes de Guinée, de Coromandel & de Malabar. On peut dire que le nouveau Dannemarck dans l'Amerique Septentrionale a été plûtôt visité qu'acquis par une possession formelle. La Réligion est Luthérienne.

IX. Le Royaume de Suede ne contient aujourd'hui que les Provinces suivantes: La Gothie ou Gothland, avec Halland, Schonen & Bleckingue. La Suede proprement telle. La Nordland. La Finnie ou Finnland. La Lapponie appartiennent en partie à la Suede, une autre partie appartient au Dannemarck, & la troisiéme au Czar. Nous ne parlons point des Isles adjacentes, qui y appartiennent. Ce Royaume étoit considerable dans le Siécle passé; car il avoit l'Ingrie; la Livonie lui fut cedée par la Pologne; & en Allemagne il avoit la Pomeranie Cite-

rieure, le Duché de Breme, la Principauté de Ferden, & la ville de Wismar. Mais la derniere guerre lui a ôté la plus grande partie de ses conquêtes. L'opression, que tout le Nord souffrit de la cruauté de Christian II. Roy de Dannemarck, fut cause qu'en 1521 Gustave Wasa délivra sa Patrie du joug; laquelle en échange lui confera la Couronne, qui est restée jusqu'à présent dans sa descendance de l'un & de l'autre Sexe. La Reine d'aujourd'hui a renoncé au gouvernement absolu, que les Etats avoient conferé en 1680. à Charles XI. son Pere. La Réligion Luthérienne est la seule qui y obtienne, & le Roy même est obligé de la professer par le serment de son Sacre.

X. La Pologne est un Royaume composé de deux Etats differens réunis sous le même Chef, qui sont le Royaume de Pologne & le Grand Duché de Lituanie. Le Royaume de Pologne contient la grande Pologne, qui comprend 5. Palatinats & 3. Gouvernemens ou Waivvodies. La petite Pologne contient 3 Palatinats. Le Grand Duché de Lithuanie contient 10. Palatinats. La Russie Polonoise comprend la Russie Rouge, la Podolie & l'Ukraine. Outre ceci il y a encore quelques Provinces, qui dépendent de la Pologne, qui sont la Prusse Polonoise, qui contient trois Waivvodies, & quelques villes libres comme Dantzic. La Masure, où est Warsovvie, & la Samogite. Le Duché de Curlande & de Semigalle est un Fief dépendant de la Pologne. Ce Royaume est électif. Les Archevêques, Evêques, Palatins, Waivvodes & les Grands Castellans sont les Sénateurs du Royaume. La Noblesse de toutes les Provinces paroît aux Diettes par des Députés. On y décide avec une grande liberté de tout ce qui concerne le bien de l'Etat. La Couronne de Pologne ne sortoit gueres autrefois de la Famille regnante;

Digitized by Google

dont la premiere étoit celle de Lechus, la seconde celle de Piastus, & la troisiéme celle de Jagellon, Grand Duc de Lithuanie, nommé Uladislas IV. qui y annexa ledit Grand Duché. Ensuite l'élection a pris plus de vogue. Le Roy & la plus grande partie de la Pologne sont Catholiques Rom. Tous les autres soit Luthériens, Calvinistes, Sociniens, &c. sont appellés Dissidents. Il y a des Grecs & quantité de Juifs.

XI. Le Royaume de Prusse étoit autrefois un fief relevant de la Couronne de Pologne, & connu sous le nom de Prusse Ducale. Mais l'Electeur de Brandebourg, Frideric Guillaume l'ayant obtenu pour lui & ses Descendans en pleine Souveraineté & sans aucune dependance feodale, son Fils Frideric I. y attacha la Dignité Royale au commencement de ce Siécle, & cette Qualité est à cette heure reconnuë par presque toutes les Puissances de l'Europe. Il est évident que la succession y sera toujours combinée avec celle de l'Electorat de Brandebourg & des autres Etats, qui y appartiennent en Allemagne & ailleurs. Le Royaume de Prusse contient 5. Provinces dont les Habitans sont la plûpart Luthériens. Il est vrai que la Réligion Réformée comme étant celle du Prince, y est aussi établie.

XII. Les vastes Etats du Czar de Moscovie, contiennent non seulement la grande Russie, mais aussi une partie de la Lapponie. On trouve de ce côté-là le Port considerable d'Archangel sur la mer blanche ou septentrionale. Ses nouvelles conquêtes de la Livonie, & de l'Ingrie lui donnent un pied à la mer Baltique, où le Czar Pierre I. a établi une résidence à Petersbourg, qu'il a tâché de rendre considerable par toutes les perfections, qu'il lui fit donner. Les Royaumes de Casan & d'Astracan s'é-

tendent jusqu'à la Mer Caspienne; & d'un autre côté ce même Etat confine à la Mer Noire autrement appellée Pont Euxin. Smolensko & Kiovv sont des conquêtes faites sur la Pologne. Tout ce pays quoique traversé par de très-grandes rivieres n'est pas rempli d'habitans à proportion, principalement dans ses parties plus septentrionales, soit à cause du grand froid ou du peu de bonte du terrein; car quant à la paresse des habitans, il est à croire qu'elle pourra être corrigée, si les desseins du Czar susdit, qui y a introduit les arts & le bon ordre, sont suivis Sous Jean Basilovvitz qui mourut en 1492. on secoüa le joug des Tartarres, qui avoient opprimé la Russie. Après quoi le Gouvernement fut assez paisible jusqu'à ce que plusieurs turbateurs, qui avoient pris le nom de Demetrius, Prince dont on ne sçavoit pas le sort, exciterent de grands désordres. Mais enfin le Gouvernement fut remis en 1513. dans la Famille où il se trouve encore. Le pouvoir du Czar est absolu. Pierre I. a pris dans les derniers tems le titre d'Empereur de Russie. La Réligion des Moscovites est la Grecque, cependant ils ne dépendent pas du Patriarche de Constantinople, mais du leur propre qui est à Moscou. Sous ces derniers régnes on n'a point fait de difficulté pour la Réligion à ceux qui y sont allé pour servir dans le militaire ou pour s'établir dans ces Etats.

XIII. L'Italie contient aujourd'hui 1. Les Etats du Duc de Savoye, qui sont le Duché de ce nom, le Piémont & une partie du Montferrat. 2. Le Duché de Milan. 3. Celui de Mantoüe. 4. Le Montferrat, dont une partie, où est Casal, est à la France, une autre, où est Trino & Alba au Duc de Savoye, comme aussi la troisiéme, qui étoit au Duc de Mantoüe. 5. Le Duché de Parme. 6. Ce-

Digitized by Google

lui de Modene. 7. La République de Venise, qui tient en terre ferme six Seigneuries dans la Lombardie, quatre dans la marche Trevisane, & deux vers l'Autriche. 8 La République de Genes. 9. La Republique de Lucques. 10. Le grand Duché de Toscane, qui contient les Etats de Florence, de Pise & de Sienne. 11. L'Etat Ecclesiastique, qui contient le Patrimoine de S. Pierre, la Campagna di Roma, le Duché de Ferrare, celui d'Urbino, le Comté de Bologne, la Romanie, la Marche d'Ancone, & plusieurs autres. Et enfin 12. le Royaume de Naples, qui est divisé en 8. Provinces. Nous ne parlons point des 13. Ducs, Comtes ou Marquis feudataires de l'Empereur, ni de ceux du Roy d'Espagne & de ceux du Pape. Les Isles de l'Italie sont la Corse aux Genois. La Sardaigne où est Cagliari, présentement au Duc de Savoye avec le titre de Roy de cette Isle. La Sicile divisée en valle Demona, valle di noto & valle di Mazara. Les Isles Vulcaniennes ou Eoliques, & l'Isle de Malthe, dont la Ville très fortifiée s'appelle Valetta. Les Chevaliers de Malthe la tiennent en fief de la Sicile; l'Isle Goze leur appartient aussi. Ce pays, qui étoit anciennement possedé par plusieurs differens peuples, fut enfin conquis par les Romains, qui y établirent le Siége de ce vaste Empire, qui s'étendit assez avant dans les trois parties du monde alors connuës. Mais le terme fatal de sa décadence étant venu, les Herules & les Goths s'emparerent du Royaume d'Italie en 480. & ce pays étant reconquis pour l'Empereur d'Orient par Narsés, celui-ci même pour se venger d'un affront y appella les Longobards environ l'année 570. qui s'y tinrent pendant deux siecles. Enfin Charle-Magne appellé au secours par le Pape détruisit le Royaume des Longobards, & obtint le titre d'Empereur tant par

la nomination du Pape, & du Sénat & Peuple Romain, que par la transaction faite à ce sujet avec l'Empire d'Orient. Le Duché de Savoye prit son origine vers l'année 1000. que Bertholde obtint une partie de ce pays du Roy Rudolf de Bourgogne; ses descendans ont obtenu des augmentations considerables des Empereurs Conrad II. Henry III IV & V. Le Duché de Milan fut donné par l'Empereur Wenceslas à Jean Galeas. La République de Venise doit son origine à ceux qui du tems des irruptions des Hunnes, des Goths & des Longobards se sont retirés de terre ferme sur les Isles. Mantouë fut approprié à la Maison de Gonzague, l'Empereur Charles IV. en ayant donné le gouvernement à Louis Gonzague, & l'Empereur Sigismond ayant conferé le titre de Duc à Jean François Gonzague. En 1707. l'Empereur se mit en possession de ce Duché, dont le dernier Duc mourut l'année suivante après avoir été mis au ban de l'Empire. L'Empereur Frideric III. a donné le titre de Duc de Modene aux deux Freres Barse & Hercule de la maison d'Este. Le Pape Paul III. confera le Duché de Parme en 1545. à Pierre Louis Farnese son Fils; le Duché de Plaisance y appartient aussi. La Famille de Medices, qui étoit une des plus illustres de Florence, eut le bonheur d'être favorisée par le Pape Clement VII. qui procura en mariage à son parent Alexandre de Medices une fille naturelle de l'Empereur Charles V. & en faveur de ce mariage l'Empereur le fit Chef de la Ville & Province de Florence & Légat de l'Empire, & cette dignité étant annexée à la famille, elle passa à son Parent avec le titre de Duc. Enfin en 1569. le Pape Pie V. donna le titre de Grand Duc à cette maison n'ayant pas pû réussir pour le titre Royal qu'il lui avoit destiné. Les terres qui composent l'Etat Ecclesiastique

Digitized by Google

ont pour titre en partie la liberalité des Empereurs & des Rois, & en partie les successions & les fiefs vacants. Les Royaumes de Naples & de Sicile furent conquis par Guillaume Fils de Tancrede, & ses freres, Ducs des Normands sur les Sarasins, qui les avoient occupés. L'un d'eux nommé Robert offrit en 1062. Naples en fief au Pape. Son Neveu Roger sçut obtenir du Pape le titre de Roy de Sicile. Constance Fille de Roger mariée à l'Empereur Henry VI. transfera la succession à la maison des Ducs de Suabe, après qu'elle accoucha solennellement sur la place publique; cependant cette succession coûta bien cher à cette maison; car son dernier Prince Conradin eut la tête tranchée par la main du bourreau en 1269 Ainsi la possession paisible de ce Fief passa à Charles, Duc d'Anjou. Mais en 1282. après la funeste vêpre de Sicile, cette Isle passa dans la maison d'Arragon. Le Royaume de Naples passa en 1442. à Alfonse Roy d'Arragon, & delà à son Fils naturel; ensuite Louis XII Roy de France, & Ferdinand le Catholique l'ôterent au dernier possesseur; & enfin Ferdinand le tira tout à lui. En 1707. le R. de Naples se soumit à la maison d'Autriche. La Sicile fut cédée au Duc de Savoye par la paix d'Utrecht, depuis reprise par l'Espagne, sur laquelle l'Empereur la reconquit és années 1718. 19 & 20. Rélig. Cath.

XIV. Le Royaume de Hongrie composé de 74. Comtés, est divisé en haute & basse. La haute est à gauche & la basse à droite en descendant le Danube. Vers le midy de la Hongrie sont la Croatie, l'Esclavonie & la Bosnie, qui sont à l'Empereur. La Dalmatie appartient en partie aux Venitiens, où sont Spalatro, Sebenico, &c. une partie est la République de Raguse, la troisiéme, où est Dulcigno, appartient aux Turcs. La Transilvanie est à l'Em-

pereur. La Wallachie & la Moldavie sont gouvernées par des Princes, que l'on appelle Hospodars ou Waivvodes, qui dépendent du Grand Turc. La Hongrie & les pays voisins étoient autrefois sous l'Empire Romain; on les nommoit Pannonie & Dacie. Les Hunnes passerent le détroit du Pont Euxin en 373. Ils firent quelquefois des courses terribles par l'Europe. Enfin l'année 1000. ils furent vaincus & convertis au Christianisme. Les premiers Rois d'Hongrie étoient descendans du fameux Attila. Cette race subsista jusqu'à la fin du 14.^e^ siecle. Il est vrai que pendant ce 14.^e^ siecle la succession feminine avoit fait passer la Couronne dans la maison d'Anjou, qui tenoit le Royaume de Naples; ensuite elle passa par Sigismond, Fils de l'Empereur Charles IV. dans la maison de Boheme; & enfin dans celle d'Autriche, qui la tient depuis 1527. La Réligion est Cath. Rom. dans la Transilvanie on souffre des Luthériens, des Calvinistes, & même des Unitaires. Depuis que l'Empereur Leopold a retiré la Hongrie de la main des Turcs, on fait comprendre tout doucement aux Hongrois, que l'on est plus en droit de les regarder comme une conquête, que comme des Etats munis de grande liberté & de grands Priviléges.

XV. Le reste des pays de l'Europe est sous le Grand Turc. La meilleure partie est la Grece, dont les Provinces du Continent sont l'Albanie, l'Epire, la Macedoine, la Thessalie, la Livadie ou Achaïe & la Morée autrefois Peloponnese; ces deux dernieres sont ce que l'on appelle proprement la Grece. Outre ces parties du continent il y a encore une grande quantité d'Isles, dont quelques-unes sont situées vers l'Europe, comme Zante, Corfou, aux Vénitiens, &c. d'autres vers l'Asie, comme

Candie

Digitized by Google

Candie autrefois Crete, qui appartenoit ci-devant aux Venitiens, qui ont perdu aussi dans la derniere guerre la Morée, qu'ils avoient auparavant conquis sur les Turcs. Ce pays, qui étoit autrefois composé de plusieurs Etats, dont les uns étoient libres, & les autres gouvernés par des Rois, fut enfin soumis aux Macedoniens; parmi lesquels Alexandre non content des bornes étroites de son Royaume, conquit une bonne partie de l'Asie, & pénetra jusqu'aux Indes. Mais cette grande Monarchie s'étant séparée d'abord après la mort de ce Conquerant en divers Royaumes, les Romains se les soumirent. Du reste la Grece a long-tems conservé l'honneur d'être la Mere des Sciences & des Belles-Lettres, qu'elle a communiqué à Rome & au reste de l'Occident. Ainsi les Villes & autres lieux de ce pays sont célebres dans la Fable & dans l'Histoire. Son état étoit encore passable pendant que l'Empire d'Orient subsista. Mais enfin le Turc l'ayant envahi entierement, & pris Constantinople en 1453. l'étude des Belles-Lettres y fut détruite, & obligée de repasser dans l'Occident. Les descendans des anciens habitans, qui y sont resté, sont de la Réligion Grecque, & vivent du trafic & du commerce. La Réligion des Turcs doit son origine à l'imposteur Mahommed, qui vers l'année 620. la compila en Arabie de celle des Chrétiens, de celle des Juifs & de celle des Payens; elle s'étendit bientôt avec le pouvoir des Sarasins dans l'Egypte & l'Afrique, de même que dans la Syrie, la Perse & autres parties de l'Asie La race des Turcs, qui étoient aussi sectateurs de Mahommed, ne commença de s'emparer que vers l'année 1300. de la plûpart des pays, qui étoient aux Sarasins, fondant parlà ce que l'on appelle aujourd'hui l'Empire Ottoman Il y a encore outre ce que nous avons dit, une étenduë de

pays au Nord du Pont Euxin habitée par des Tartares; la presqu'Isle qu'une partie de cette terre forme s'appelle la Krimée. Le Chan des Tartares, qui est le Prince de ces peuples, est tributaire du Grand Turc.

IV. Les parties les plus considerables de l'Asie sur le Continent sont la Septentrionale, qui est toute habitée par des Tartares. Ainsi on trouve au Nord de la Moscovie la Tartarie déserte. Au Nord de la Perse les Tartares Usbeck Au Nord du Mogol le Turchestan, & au Nord de la Chine Cataya. La Tartarie qui tire encore plus vers le Nord, s'appelle Niuche. Outre ceci il y a encore des Tartares au Nord du Pont Euxin, dans la Krimée, de même qu'entre le Pont Euxin & la Mer de Sala ou noire, que l'on appelle Circasses. La partie Méridionale contient: I. l'Empire du Grand Turc, qui tient en Asie la Natolie ou Asie Mineure. Les Provinces entre la mer de Sala le Pont Euxin & la Montagne autrefois appellée Caucase, qui sont la Mingrélie, Imeret & la Georgie. Les Provinces qui sont entre la mer Méditerranée, l'Euphrate & la mer Rouge, qui sont la Syrie, dont la Palestine & la Phenicie font partie, & l'Arabie. Et enfin les parties qui sont entre l'Euphrate & le Tigre, qui sont la Turcomannie & Diarbeck; cette derniere contient la Mésopotamie, l'Assyrie & Babylon ou la Chaldée.

II L'Etat de Perse qui s'étend depuis la mer Caspienne & la Frontiere du Grand Turc jusqu'à l'Inde. Nous y remarquons seulement sa résidence qui est Ispahan, & Ormus qui est fort marchande, & située au détroit du golfe de Perse. Les differentes Provinces du Royaume étoient autrefois connuës sous le nom de differens Peuples, tels qu'étoient les Medes, les Perses, les Hircans, les Garmans, &c.

Digitized by Google

III. L'Etat du Grand Mogol, qui s'étend depuis l'Inde jusqu'au-delà du Gange. Cet Etat est composé d'un grand nombre de tant Provinces que Royaumes. La résidence est Iehan-Abad. Les villes Amadabat, Cambaya & Suratte situées au golfe de Perse son celebres pour le commerce qui s'y fait.

IV. La Chine, qui est divisée en 15. où 17. Provinces, est la derniere partie de ce Continent vers l'Orient. La résidence de l'Empereur est Peking. Les villes de Canton & de Nanking sont marchandes, & celles de Macao est cédée aux Portugais.

Outre ces grands Etats, que l'on appelle aussi des Empires, la plus grande partie de la côte méridionale est divisée en plusieurs Royaumes, comme sont Decan & Golconda, joignant l'Etat du Grand Mogol; sur la côte de Malabar est Calecut, où est Goa, aux Portugais; sur la côte de Coromandel Pondichery, aux François; le pays des Bramans, les Hollandois y ont le Fort de Palicatte, les Anglois Madrespatan, les Danois Tanguebar, & les Portugais S. Thomas. Plus avant sont les Royaumes de Bisnagar & Narsigna. Audelà du Gange vers le Nord est le Royaume d'Ava vers la Chine, Aracam, Pegu; vers le Sud sont Bengale, Martaban, Cambodia, Siam, Cochinchine, tributaire de la Chine, de même que Tonquin, & la presqu'Isle la plus méridionale Malacca; les Hollandois prirent la Ville de ce nom en 1641. aux Portugois, qui l'avoient tenu 130. ans.

Les Isles de l'Asie vers l'Occident ou de l'Asie mineure sont celles de Rhodes, que les Turcs prirent sur les Chevaliers de S. Jean, aujourd'hui de Malthes, en 1522. Cypres, dont les Seigneurs de Lusignan étoient Rois; la Fille du dernier en porta le titre & la possession

dans la maison de Savoye; mais son Frere naturel en eut la possession, & sa Veuve qui étoit noble Venitienne la remit à la République. Les Turcs la conquirent en 1570. Outre les Isles du Golfe d'Arabie ou de la mer rouge, & celles du Golfe de Perse comme Ormus, on trouve endeça du Gange les Isles Maldives & celle de Ceylon; le Roy de cette derniere est Mahomedan, & toutes les côtes sont aux Hollandois. Parmi les Isles de la Sonde les principales sont Sumatra, dont les Rois sont Mahomédans ou Idolatres; les Hollandois y ont deux places, & une partie des mines. Java, qui a deux Rois, l'un à Materan, l'autre à Bantam; les Hollandois y ont bâti Batavia, qui est la résidence de leur Gouverneur aux Indes. Borneo a un Empereur Mahomedan & plusieurs Princes, le peuple est Idolâtre; les Hollandois ont quelques Places sur les côtes. Les Isles Moluques, dont la plus considerable est Celebes, sont habitées par des Mahomedans ou Idolâtres, & gouvernées en partie par des Rois, qui sont ou alliés ou dépendans des Hollandois. Des Isles Philippines la principale est Luçon, où est Manillha, une partie de cette Isle appartient à l'Espagne, le reste & plusieurs autres sont possedées par des Rois tributaires au plus puissant d'entre eux; les originaires sont Payens. L'Isle Formosa, où les Hollandois avoient bâti des Forts, leur fut ôté par les Chinois en 1661. Le riche Etat à l'Est de la Chine nommé le Japon contient trois Isles principales. Depuis que les Portugais le découvrirent en 1542. la Réligion Cath. R. y avoit pris des accroissemens très considerables; mais la jalousie de l'Empereur Payen ayant été excitée, elle causa une persécution des plus sanglantes; & dequis ce tems là les Japonois n'entrent plus en commerce qu'avec les Hollandois, &

Digitized by Google

même avec une fort exacte circonspection. La terre de Jedso est au Nord du Japon, mais les Japonois mêmes n'en connoissent rien. Enfin les plus éloignées vers l'Orient sont les Isles des Larrons, ou Marianes; on prétend en dernier lieu qu'il y a au Sud Oüest de celles-ci, & au Nord Est des Philippines, trente & deux autres Isles ou plus, que l'on nomme les nouvelles Philippines. Du reste les Tartares qui étoient autrefois partagés en plusieurs Hordes ou Royaumes furent réunis sous un grand Chan dans le douziéme siecle. Après quoi ils firent des irruptions en Europe, & établirent les Royaumes de Casan, Astracan & de la Krimée. En Asie ils établirent le Royaume de Zagathay au Nord de la Perse, & celui de Cathaja à l'extrémité de l'Orient. Dans le quatorziéme siecle le fameux Tamerlan les réunit encore. Son descendant Schach Bahur occupa le Thrône du Mogol dans le seiziéme siecle. Enfin les Tartares Orientaux s'étant rendus maîtres de la Chine dans le treiziéme siecle, après une guerre de 70. ans, les Chinois secoüerent le joug dans le quatorziéme siecle; mais enfin les Tartares les reconquirent en 1644. Une partie des Tartares sont Mahomedans; la plûpart sont Payens. Les Turcs, les Perses & les Indiens du Mogol sont Mahomedans, mais de trois sectes differentes. La Chine & le Japon sont Payens. Enfin l'on remarquera que les Chrétiens ayant fait des Croisades vers la fin de l'onziéme siecle pour retirer la Terre-Sainte de la main des Infideles, Godefroy de Boüillon fut Roy de Jerusalem en 1099. Ce Royaume subsista jusqu'en 1187. les Rois suivans ou ceux qui y prétendoient, étoient plûtôt titulaires qu'effectifs; desquels le titre de ce Royaume passa dans divers Maisons.

V. L'Afrique est une grande Presqu'Isle, attenante au

Continent de l'Europe & de l'Asie. Sa côte septentrionale adjacente à la mer Méditerranée nous fait voir :

I. L'Egypte, qui est remarquable par le Nil & les Pyramides. La Capitale est Caire. Ce Royaume, qui étoit autrefois très-celebre, fut ensuite conquis successivement par les Perses, les Grecs & les Romains. Ensuite les Sarasins, & après eux les Mamelucs s'en emparerent, jusqu'à ce que les Turcs se le soumirent en 1516. Le Grand Turc le gouverne par un Bacha. Le reste de cette côte s'appelle la Barbarie ; elle contient le Royaume de Barca, qui dépend de même du Grand Turc. Ensuite les Républiques Mahomedanes de Tripoli, Tunis & Alger, fameuses retraites des Corsaires, qui sont sous la protection du Grand Turc. Enfin à l'extrémité de cette côte, & vers l'Ocean Atlantique sont les Royaumes de Fez & de Maroc aussi Mahom. dont le Roy se qualifie Empereur d'Afrique. Le Roy d'Espagne tient sur la côte d'Alger Oran & Mazalquivir, sur celle de Fez, Tanger, Ceuta, Melilla, &c. Les Portugais ont Cazar, Ezaghir. Au Sud de la Barbarie s'étend le Biledulgerid, depuis l'Egypte jusqu'à l'Ocean Atlantique. Ce pays est divisé en 8. Provinces principales. La plûpart des Rois ou Républiques de ce pays sont tributaires des Turcs de Tunis, Tripoli & Alger ; une grande partie des habitans sont Mahom. d'autres sont Juifs. Plus au Sud est le grand désert de Zara, divisé en 7. Provinces, dont les habitans sont ou gouvernés par des Rois, ou vivans dans l'indépendance, & ils sont en partie Mahomédans, le reste est sans loy. Encore plus vers le Sud est la Nigritie, qui contient jusqu'à 16. Royaumes ; les habitans sont Mahomedans ou Payens, quelques Chrétiens, point de Juifs. Les Portugais y tiennent le Fort S. Philippe, & les François y ont aussi le commer-

Digitized by Google

ce de la Compagnie de Senegail. Plus loin ſur la côte Occidentale on trouve la Guinée entre Benin & Malaquette; les Portugais, Anglois, Hollandois, Suedois & Danois ont des Forts ſur les côtes, & y font le commerce. Les habitans ſont Payens. Tout le reſte de l'Afrique s'appelle Ethiopie, dont l'intérieure contient l'Abiſſinie & la Nubie. L'Etat du Grand Abaſſi ou Negus, communément nommé Prêtre-Jean, & qui prétend deſcendre de Salomon, eſt de la Réligion des Chrétiens, que l'on appelle Cophtes, quoiqu'on y trouve auſſi beaucoup de Mahomédans & des Payens. Du reſte cet Etat eſt très-étendu & contient pluſieurs Royaumes qui en dependent. Les Nubiens ſont auſſi de la Réligion Cophte. L'Ethiopie extérieure contient le pays de Biafara, où ſe trouvent pluſieurs Royaumes Les habitans ſont Idolâtres. Le pays de Congo, qui contient auſſi pluſieurs Royaumes, dont celui de Congo eſt le plus puiſſant; la Capitale eſt S. Salvador, où il y a des Portugais établis; les Miſſions des PP. Jeſuites y ont travaillé avec ſuccès. L'Empire de Monomotapa, qui contient pluſieurs Royaumes, qui lui ſont ſujets ou tributaires. Les Portugais y ont penetré auſſi bien que les Miſſions. L'Etat du Mono-Emugi eſt à peu près de même; mais les Miſſions n'y ont point encore trouvé d'entrée. La côte des Caffres tourne extérieurement à l'entour des pays ſuſdits, & elle eſt la plus conſiderable de l'Afrique; on y remarque le Cap de Bonne-Eſperance, où les Hollandois ont une Colonie. Sur la partie Occidentale de cette côte eſt le Royaume de Mataman, ſur l'Orientale celui de Sofala, aux Portugais. Une partie des Caffres ſont ſans loy; quelques-uns ſont Mahom. En ſuivant la côte Orientale on trouve le pays de Zanguebar, qui eſt Mahomé-

dan ou Idolâtre; il est gouverné par plusieurs Rois, qui sont la plûpart tributaires ou dépendans des Portugais; ces derniers sont principalement établis à Monbaze, Mozambique & Mélinde. Plus loin est la côte Mahom. d'Ajan, qui contient les Royaumes d'Edel, d'Adea tributaire du Grand Negus, Magadoxo & la République de Brava tributaire des Portugais; & enfin la côte d'Abex toute Mahomed. dont la partie Méridionale dépend du Negus, & la Septentrionale du Grand Turc. Le reste de cette côte jusqu'à l'Isthme de Sués, qui est entre la Mediterranée & la Mer rouge, est partie d'Egypte. Les Isles les plus mémorables de l'Afrique sont Zocotora, payenne dépendante d'un Roy ou Prince en Arabie. Madagascar, Payenne & Mahom. les François y avoient des Colonies, ils ont encore l'Isle de Bourbon, Comorre & les autres adjacentes sont la plûpart Mahomédanes, & ont chacune son Roy. L'Isle de S. Thomas & les autres voisines sont aux Portugais, & la plûpart Cath. Rom. Celles du Cap Verd furent découvertes inhabitées en 1440. les Portugais s'y établirent dans la suite. Les Canaries sont à l'Espagne, & presqu'entierement Cath R. L'Isle de Madere est aux Portugais de même que les Isles Açores. L'Isle de S. Helene est occupée par les Anglois.

VI. L'Amérique que l'on appelle aussi le nouveau monde, ou les Indes Occidentales, & que l'on présume être l'Atlantique des Anciens, est composée de deux grandes presqu'Isles, qui se joignent par l'Isthme de Panama. Leur situation les fait appeller l'une la Méridionale & l'autre la Septentrionale. Les Européens l'ont nouvellement découvert en 1492. & les suivans. Depuis ce tems là ils se sont successivement saisi des côtes. Les originaires

ginaires que l'on a trouvé ou Idolâtres ou ſans Loy, ſont repouſſés vers le milieu. Le Roy d'Eſpagne y a deux Vice-Rois, l'un à Mexique pour l'Amérique Septentrionale, & l'autre à Lima dans le Perou pour la Méridionale. La Terre ferme, autrefois Caſtille d'Or, eſt la partie de l'Amérique Méridionale la plus avancée vers le Nord, à l'Eſpagne. Sur la côte Occidentale ſe trouve le Perou, à l'Eſpagne. Le Chily vers l'Occident, & le Tucuman, vers la riviere de la Plata, eſt en partie à l'Eſpagne, en partie encore aux Originaires ou Sauvages. La pointe Méridionale de cette partie s'appelle Terre Magellanique, où demeurent les Sauvages nommés Patagons. Sur la côte Orientale de cette partie, on trouve le Paraguay, qui dépend preſque tout de l'Eſpagne. Enſuite eſt le Breſil, diviſé en 14. Gouvernemens ou Capitanies. Il eſt au Roy de Portugal, juſqu'au Cap du Nord, & les deux côtés de la R. des Amazones. Les Hollandois ont Surinam. Les François ſont établis dans la Cayenne. Plus avant en terre eſt le pays des Amazones, dont les Habitans ſont Sauvages & ſans Loy. Les Eſpagnols ont encore dans l'Amérique Septentrionale le Mexique & le nouveau Mexique. Dans tous ces pays dépendans de l'Eſpagne ou du Portugal la Réligion Cath. R. eſt exercée, & les Américains ſoumis la ſuivent du moins en apparence. On trouve ſur la côte du Golfe de Mexique la Floride, où les Anglois tiennent la Caroline. La Virginie, la nouvelle Angleterre, la nouvelle Hollande, & la nouvelle Suede, le Détroit & Golfe de Hudſon, la nouvelle Ecoſſe ou Acadie ſont aux Anglois. Les François y tiennent le Canada où eſt Quebec, la nouvelle France, le Miſſiſſipi ou Loüiſiane. Le reſte de l'Amérique Septentrionale, qui tire vers le Nord, & vers l'Oüeſt

n'est connu qu'en partie par les côtes. Les Isles les plus remarquables de l'Amérique sont Terre-neuve, qui est aux Anglois; celle du Cap-Breton & les autres qui sont dans l'embouchure & le Golfe de S. Laurent, sont à la France. Les Isles que l'on trouve avant que d'entrer dans le Golfe de Mexique, sont appellées Antilles; les grandes sont Cuba, où est la Havana, aux Espagnols; l'Isle Espagnole, où est S. Dominique, à l'Espagne vers l'Orient, aux François vers l'Occident; la Jamaïque, que les Anglois tiennent; & Porto Rico à l'Espagne. A l'Est de celles-ci sont les Isles Caribes ou Barlovento, où les Anglois tiennent Barbade, S. Christofle & Antigoa, les Hollandois S. Eustache, Curaçao, &c. les Danois l'Isle S Thomas; les autres sont habitées par les François. Au Nord des grandes Antilles sont les Isles Lucayes ou Sotavento, qui sont aux Espagnols. Audelà du Détroit de Magellan est la Terre du feu; & environ à l'Occident du nouveau Mexique la Californie. Ces Isles ne sont pas encore assez connuës. Ainsi il y a encore une bonne partie de terres, qui nous sont inconnuës, les unes vers le Nord & les autres vers le Sud, dont on n'a entrevû jusqu'ici que quelques côtes, dont il seroit inutile de marquer ici les noms.

CHAPITRE TROISIEME.

Du Blason des Armoiries.

I. L'Usage du Blason servant aujourd'hui en Europe, non seulement pour connoître les Familles, mais aussi pour marquer les Terres & les dépendances; il est bon d'en remarquer ici l'origine & les régles. Quant

au premier il est vrai, que les anciens Grecs & Romains avoient déja la coûtume de se servir dans leurs Cachets & sur leurs Boucliers de certaines marques prises, ou arbitrairement, ou dans le sens d'une signification symbolique. Mais puisque ces marques n'étoient ordinairement tout au plus que personnelles, on ne peut pas proprement les prendre pour des Armoiries. Quelques-uns en attribuent l'invention aux anciens Allemands; mais on n'en sçait autre chose, si non que Tacite rapporte, qu'ils avoient coûtume de distinguer ou de diversifier leurs Boucliers de differentes couleurs très-vives ou éclatantes. D'autres remarquent que depuis le tems des Croisades ces marques de distinction ont pris vogue sur le pied que l'on s'en sert aujourd'hui. Cependant dans ce tems-là même on en rapportoit l'origine à une date plus ancienne, telle que le tems de Charlemagne. Elles entrent dans les Céremonies, soit de paix ou de guerre; & on a même établi pour cet effet des gens, qui servent en titre d'office, comme sont les Rois d'Armes, les Heraults, & les Poursuivans d'Armes.

II. Les principales pieces, où ces ornemens paroissent, sont le Bouclier, que l'on appelle l'Ecu; & le Casque, qui est surmonté du Timbre. L'Ecu contient ce qu'il y a de plus essentiel. Sa figure est ou en banniere ou en bouclier, ou en ovale, qui est souvent entouré d'un cartouche; la figure de Lozange est appropriée au sexe feminin. Voyez les figures de la planche N.° 1 on y fait attention *N.°* 1.
aux couleurs & aux figures, qui y sont représentées. Les couleurs, que l'on nomme aussi les émaux, outre les fourrures marquées N°. 2. sont ou les deux principaux *N.°* 2.
métaux l'Or & l'Argent, ou les couleurs simplement telles, qui sont le bleu, le rouge, le noir & le verd,

Voyez leurs noms en terme de Blason, & la maniere
N.° 3. de les représenter par des hachures à la planche N.° 3. On ne tient point que le pourpre & le brun soient de ce nombre.

III. Outre les Ecus, qui ne sont que d'une simple couleur, & que quelques-uns nomment des armes d'attente, il y en a, où la seule division de l'Ecu fait le Blason.
N.° 4. & 5. Elles sont ou en deux N.° 4. & 5. ou bien elles sont en trois, & en ce cas il arrive qu'elles concourent ou dans
N.° 6. le milieu N.° 6. ou vers les bords, comme N.° 7. ou
N.° 7. enfin elles sont en traits paralleles N.° 8. Lorsque l'Ecu
N.° 8. est coupé en quatre parties, il s'appelle écartelé, dont voici des exemples, de même que de ce qu'on nomme
N.° 9. contr'écartelé N.° 9. Huit parties qui concourent au centre font autant de girons; lesquels allant quelquefois en spirale on les appelle arrondis & appointés en cœur,
N.° 10 N.° 10. Voici une division d'Ecu qui s'exprime d'une
N.° 11. maniere assez particuliere N.° 11. On l'énonce en terme de Blason : Ecartelé en cœur d'argent & de gueules componé à l'entour de l'Ecu.

IV. Toutes ces sortes de divisions se font quelquefois par des lignes qui ne sont pas droites, mais au contraire
N.° 12. re diversement contournées, dont voici les noms N.° 12.

V. Les figures, qui paroissent dans les armoiries, sont ou celles qui sont propres à l'Art du Blason, & que l'on appelle Pieces Honorables; ou ce sont des figures communes. Les pieces honorables sont ou du premier ou du second ordre. Celles du premier ordre sont re-
N.° 13 présentées N.° 13. Les huit premieres & celles qui en résultent, sont ordinairement larges d'un tiers de l'Ecu.
N.° 14 Le N.° 14. marque differentes variations de ces pieces du premier ordre.

Digitized by Google

VI. Les pieces honorables du second ordre sont premierement les diminutions de celles du premier ordre, dont les noms & en partie les largeurs se voyent N.° 15 En second lieu on y peut rapporter celles marquées N.° 16. Enfin on rapporte encore à cette classe quelques pieces propres à l'art, qui sont représentées N.° 17. Les fuseaux sont obliques, & c'est en quoi ils different des Lozanges. On trouve aussi des fuseaux seuls ou posés de suite. N.° 15. N.° 16. N.° 17

VII. Outre ces pieces honorables il entre dans le Blason, tout ce qu'on trouve bon de peindre soit d'hommes, d'animaux, de végetables, de corps naturels ou artificiels. Où on remarquera seulement, que les pieces honorables ne donnent pas pour cela seul de préference aux armes, ni aux familles qui les portent, par-dessus celles, dont les objets ne sont que communs; mais que l'on appelle seulement ces pieces Honorables, parce qu'elles tiennent plus du goût de l'Art Héraldique.

VIII On remarquera encore que la grande régle de l'Art du Blason est, qu'il ne se trouve jamais métal sur métal, ni couleur sur couleur. Où on observera pourtant que les fourrures sont d'une espece ambiguë; que de plus cette régle ne regarde point les couleurs naturelles, ni les parties moins principales des pieces, ni les brisures, ni les Ecussons posés sur le tout, ni les Ecus cousus de deux couleurs, &c. elle n'a pas lieu non plus lorsque le fond ou l'Ecu est composé de métal & de couleur; car alors la figure peut s'inscrire indifferemment. Enfin les armes, qui répugnent directement à cette régle s'appellent des Armes à enquerir. Du reste il est bien vrai, que dans plusieurs Armoiries les couleurs aussi bien que les figures peuvent avoir eu quelque signification sym-

bolique ou autre ; mais plusieurs ayant été pris aussi sans doute au hazard ou arbitrairement, il n'est pas croyable qu'on puisse établir une régle sûre & generale pour développer le sens mystérieux, qui doit s'y trouver.

IX On voit souvent plusieurs Armoiries jointes dans le même Ecu. Elles s'y trouvent ou écartelées, ou selon quelqu'autre rang, on les joint ou pour marquer les differentes acquisitions, ou droits & prétensions, comme on voit dans les Armoiries de plusieurs Souverains & autres Princes & Seigneurs ; ou bien elles marquent seulement des alliances, qui ont fait honneur à leur famille, ceci est fort usité en France; ou enfin elles sont prises comme une marque de respect, en reconnoissance des bienfaits reçûs.

X. Lorsque l'on met un Casque dessus l'Ecu des armes, on le surmonte ordinairement d'un Timbre. Le Casque est ou fermé ou ouvert & sans grille. Cette derniere espece ne convient qu'aux armes des Rois. Quant aux autres il faut convenir que l'usage ne reçoit point les régles, que quelques-uns ont voulu donner, tant par rapport à la matiere du Casque, que par rapport à sa position & au nombre de ses grilles. Le Casque est ordinairement couvert du Champeron, volet ou mantelet, qui termine en lambrequins, les couleurs sont communément celles de l'Ecu. Quant au Timbre les Auteurs François en laissent le choix libre à un chacun, de sorte qu'il seroit inutile d'en donner des régles. Ce Timbre sort ordinainairement d'un bourlet ou d'une couronne dont le Casque est couvert. On met encore à côté de l'Ecu un ou deux tenans ou supports, lesquels se conservent le plus souvent dans la posterité, quoiqu'on trouve aussi qu'on les change suivant l'occasion. Enfin il est assez évident, que

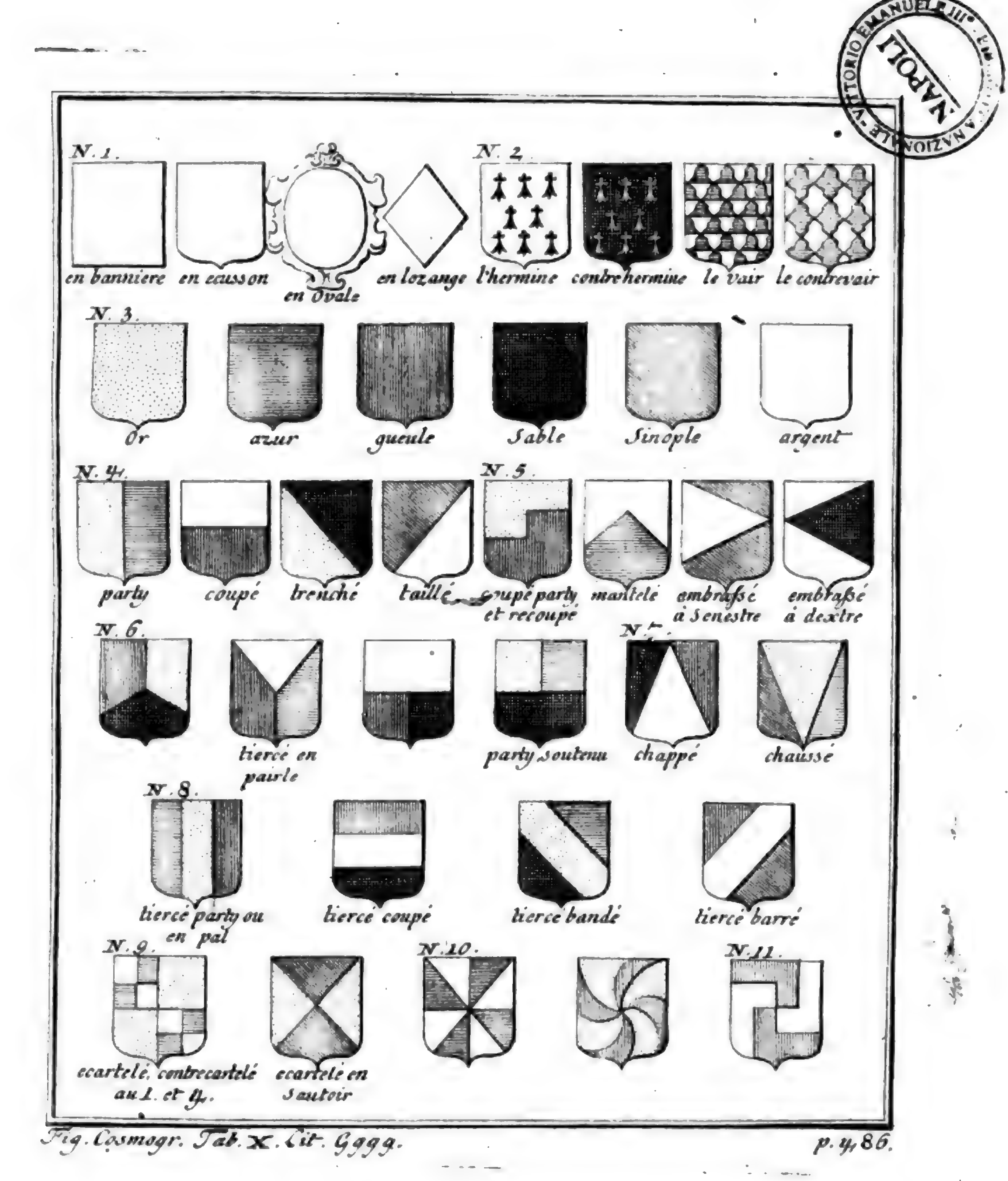
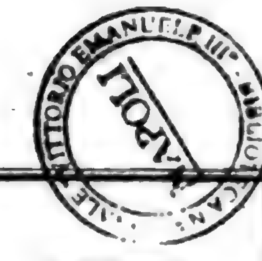


Fig. Cosmogr. Tab. X. Lit. Gggg.

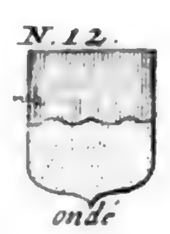
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

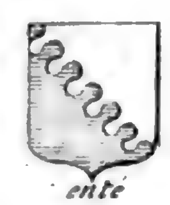
Digitized by Google

Digitized by Google



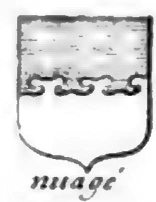
N. 12.


ondé


enté

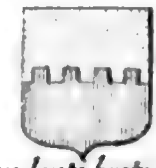
vivré

nebulé

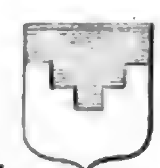

nuagé

vairé

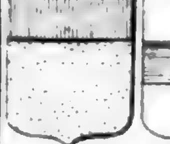
canelé engreslé

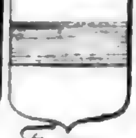

endenté bretessé ou crenelé

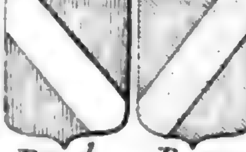
emmanché de $3\frac{1}{2}$ pi.

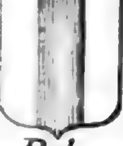

de 9 coupé pignonné renversé de 2 montants sur 3

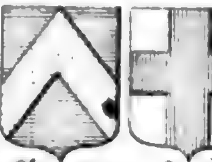
N. 13.


Chef.

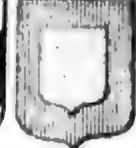

Fasce.

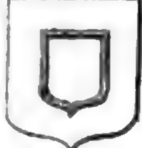

Bande. Barre.

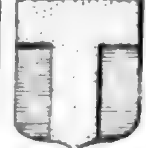

Pal.


Chevron.

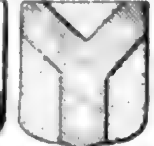
Croix. Sautoir.

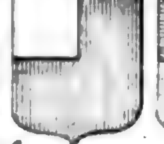

Bordure


Orle.


Chef pal.

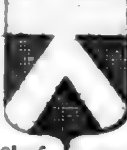
Champagne.


Pairle.

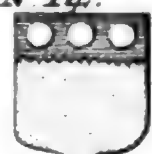

francquartier

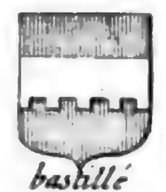
giron.

Ecusson.

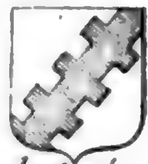
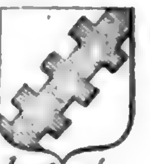

Chef chevron etc.

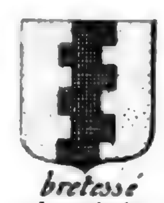
N. 14.


denteté


bastillé

crenelé

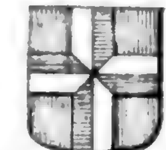


bretessé


bretessé et contrebr.

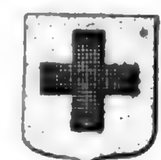
ondé.

vivré

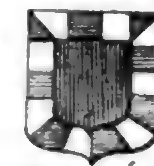
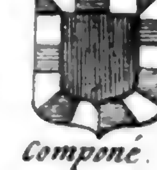
arboré.



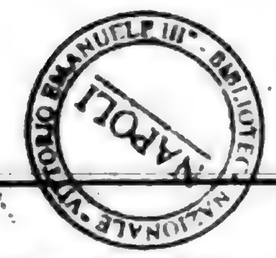
C. ecartelée



alaisé



Componé.

fleuronné



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

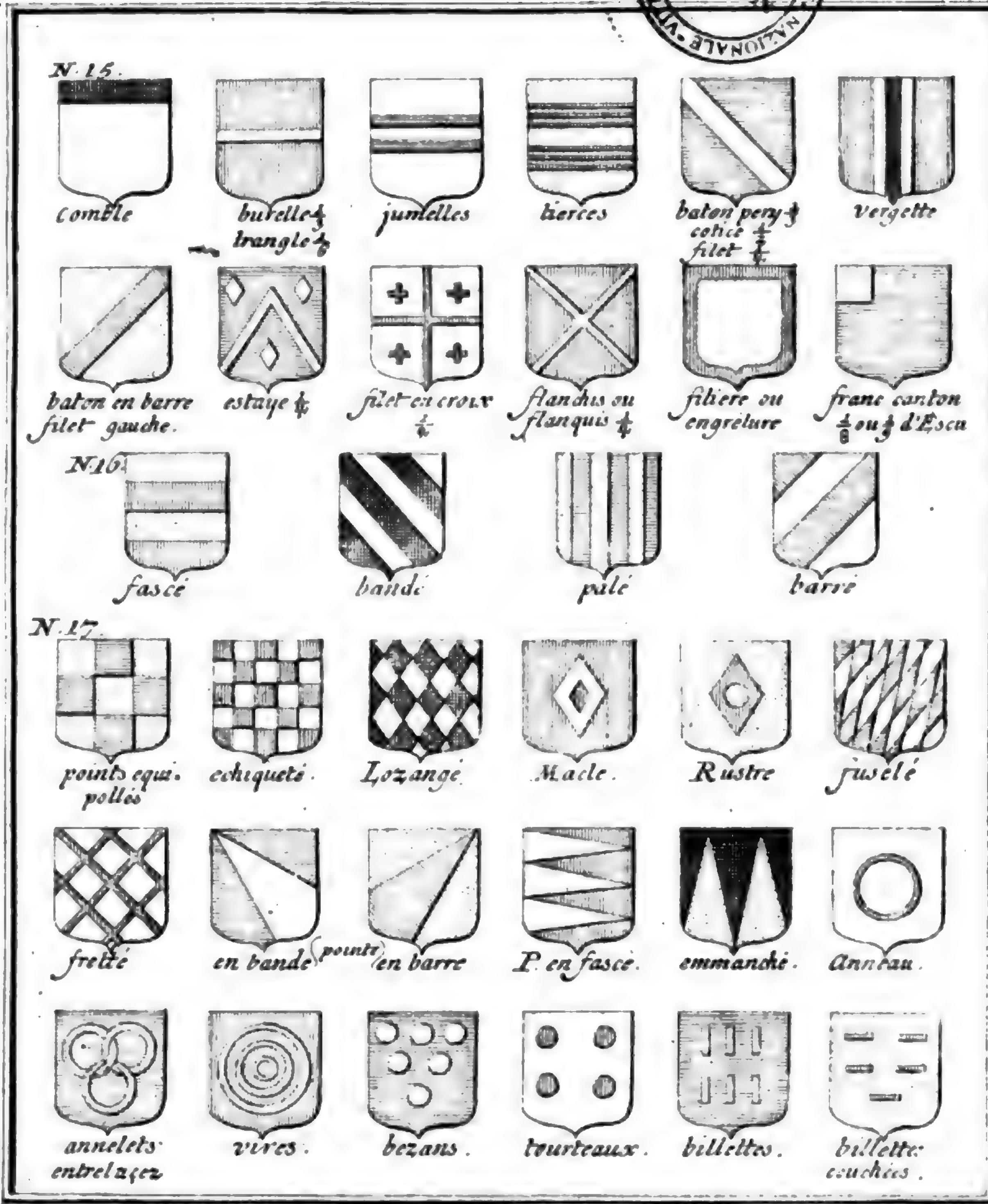


Fig. Cosmogr. Tab. XII. Lit. Giii. p 4. 86.

Digitized by Google

les marques que le Grand-Connetable, le Grand-Maître de l'Artillerie, les Maréchaux de France, le Grand-Admiral, le Géneral des Galeres, le Chancellier, le Grand-Ecuyer & autres ajoûtent à l'Ecu de leurs armes, de même que les Croix des Ordres militaires, que les Chevaliers ajoûtent aux leurs, ne sont qu'autant de distinctions de dignités personnelles. On met souvent au lieu du Casque & du Timbre une Couronne. Celle du Pape est triple. Les Royales sont fermés de quatre demi-cercles. Celle de France est ornée de fleurs de Lis. Celle du Dauphin a quatre Dauphins, qui forment deux demi-cercles. Les autres sont ordinairement ouvertes; les differences, que l'on y met pour les fleurons & les perles, ne s'obſervent pas toujours avec assez d'exactitude. Les Cardinaux, Archevêques, Evêques & autres couvrent l'Ecu de leurs armes d'un Chapeau; dont la couleur & le nombre des nœuds du cordon font la difference. Le Chancelier de France & autres y mettent le mortier. Les Ecclésiastiques Allemands mettent la Mitre, & les Evêques passent la Crosse & l'Epée en sautoir derriere l'Ecu de leurs armes. La Couronne de l'Empereur est une Mitre, dans laquelle passe un demi-cercle surmonté d'un Globe. Les Electeurs d'Allemagne n'ont qu'un Bonnet rouge retroussé d'Hermines. Les Princes d'Allemagne ont un semblable Bonnet surmonté de deux demi-cercles, ornés de perles sur leur bord & d'un Globe au sommet.

XI. On observe dans plusieurs Armoiries des brisures, qui sont des marques que l'on a introduit pour distinguer les branches des familles, & quelquefois la naissance. La premiere maniere consiste dans le changement des couleurs. La seconde en omettant quelque chose des figu-

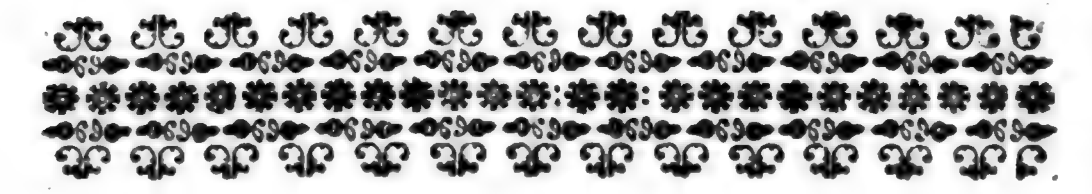
res de l'Ecü principal. La troisiéme qui est presque la seule reçüë aujourd'hui se pratique en ajoûtant une marque aux armes ordinaires; d'où est venu le proverbe: que qui porte moins est le plus. Ces sortes de Brisures sont le Lambel, qui est ordinairement de trois pendans; la Bordure, le Trescheur, le Franc quartier, le Chevron ou Estaye, la Bande brochant sur le tout; la Barre. On brise encore de cette maniere en ajoûtant aux armes de la famille celle du côté maternel, ou celles des Seigneuries acquises. La quatriéme maniere est le changement des figures de l'Ecu. Enfin on s'est aussi servi pour cet effet des armes qu'on appelle esclopées, c'est-à dire, dont les quatres coins étoient coupés. Les Allemands n'ont souvent mis d'autre brisure, que le changement du Timbre. Enfin on remarquera encore qûe les armes parlantes ne sont pas pour cette seule raison à rejetter de la science du blason, puisqu'on trouve des exemples, qui par leur ancienneté & noblesse autorisent assez leur usage.

XII. Les Pavillons, dont on se sert sur mer, & qui font connoître à quelle Nation appartient un vaisseau, tiennent aussi en quelque maniere du Blason. Les Pavillons Royaux contiennent ordinairement les armes du Souverain; les autres sont presqu'ordinairement de differentes couleurs, & contiennent des Fasces, des Croix, des Sautoirs, Francs Quartiers, &c que la pratique & la seule peinture font mieux connoître, que si on en faisoit une longue description.

FIN DE LA GEOGRAPHIE.

Digitized by Google

ALGEBRE
ET
ANALYSE.



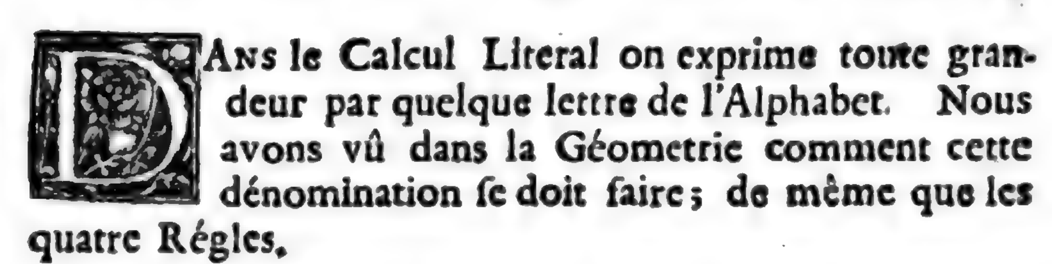
TRAITÉ D'ALGEBRE.

PREMIERE PARTIE.

De l'Analyse des Grandeurs finies.

INTRODUCTION.

I.



DANS le Calcul Literal on exprime toute grandeur par quelque lettre de l'Alphabet. Nous avons vû dans la Géometrie comment cette dénomination se doit faire ; de même que les quatre Régles.

II. On remarquera seulement dans la Multiplication, qu'en élevant un Binôme $a+b$ à une puissance quelconque, les termes de suite contiennent depuis le premier jusqu'au pénultieme les puissances de a, en commençant par la plus haute, & descendant jusqu'à la lineaire ; au

lieu que celles de b vont en montant depuis le second terme jusqu'au dernier; & que les onces, qui précedent ces termes depuis le second jusqu'au pénultieme ne sont que des quotiens, qui se trouvent en divisant de suite les exposans, écrits depuis le plus haut jusqu'à l'unité, par la même suite, rangée depuis l'unité jusqu'au plus haut. Ainsi élevant $a + b$ au septiéme degré on aura

$$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

où les onces 7. 21. 35. sont les quotiens de

$$\frac{7 \mid 6 \mid 5 \mid 4 \mid 3 \mid 2 \mid 1}{1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7}$$

III. Ce binôme, ainsi élevé à une certaine puissance fournit une formule pour faire l'Extraction d'une telle racine sur un nombre proposé. Par exemple on veut extraire la racine d'un nombre de la quatriéme puissance 6597500625.

La formule est $a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$

$a^4 =$ 65|9750|0625 f 285.
16

499750

$4a^3x =$ 256
$6a^2x^2 =$ 1536
$3ax^3 =$ 4096
$x^4 =$ 4096

454656

45094,0625

Digitized by Google

$4a^3x =$ 439040
$6a^2x^2 =$ 117600
$4ax^3 =$ 14000
$x^4 =$ 625

450940625

0.

IV. Dans la Division on remarquera, que lorsqu'une grandeur simple se divise par un binôme on peut pousser la Division à l'infini, & on trouve par-là une suite infinie, qui pourra être continuée aussi loin que l'on voudra. Par exemple:

$a+b, \quad | \quad \frac{ax}{ax+bx} \int x - \frac{bx}{a} + \frac{b^2x}{a^2} - \frac{b^3x}{a^3}$, &c.

$-bx$

$-\frac{b}{bx} - \frac{b^2x}{a}$

$+ \quad +$

$+\frac{b^2x}{a}$

$+\frac{b^2x}{a} + \frac{b^3x}{a^2}$

$- \quad -$

$-\frac{b^3x}{a^2}$

&c.

V. Quant aux quantités ſourdes ou irrationelles, qui ſe mettent ſous un ſigne radical ($\sqrt{}$) au-deſſus duquel on marque ordinairement la dimenſion, que cette quantité eſt cenſée avoir; il faut remarquer ce qui ſuit.

VI. Il arrive ſouvent, que ces ſortes de grandeurs compriſes ſous un ſigne radical ſont précedées de quelque Multiplicateur; & alors pour mettre tout ſous le ſigne radical, il faut élever ce Multiplicateur à la puiſſance marquée par le ſigne radical, & multiplier cette puiſſance par la grandeur qui ſe trouve ſous le ſigne radical, que l'on poſe enſuite devant tout ce produit. Au contraire de ceci, ſi toute une quantité ſe trouve ſous un ſigne radical, & que l'on la peut réſoudre en facteurs, dont l'un ſoit préciſément de la puiſſance marquée par le ſigne radical; on n'a qu'à mettre une telle racine de ce facteur devant le ſigne radical, & ſon coëfficient après.

VII. De cette maniere la quantité affectée ſe trouve réduite à des termes plus ſimples, & s'il y en a pluſieurs, qui ayent la même quantité ſous le même ſigne radical, elles ſont commenſurables entr'elles, & on peut les additionner ou ſouſtraire en operant uniquement ſur les quantités qui précedent le ſigne radical; autrement on n'y peut venir que par le moyen des ſignes +, & —

$$\begin{array}{llcll} \sqrt[3]{16} & \sqrt[3]{24} & = & \sqrt{8} & \sqrt{18} \\ \sqrt[3]{8,2.} & \sqrt[3]{8,3} & & \sqrt{4,2} & \sqrt{9,2} \\ 2\sqrt[3]{2} & 2\sqrt[3]{3}. & & 2\sqrt{2}. & 3\sqrt{2}. \end{array}$$

VIII. Lorſqu'il s'agit de multiplier ou de diviſer deux grandeurs qui ont le même ſigne radical; on n'a qu'à operer ſur les grandeurs, qui ſont devant le ſigne

Digitized by Google

radical, de même que sur celles qui sont après.

$\sqrt{3} + \sqrt{2}.$ $\quad$ $2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$
$\sqrt{3} - \sqrt{2}.$ $\quad$ $3\sqrt{6} - 5\sqrt{3}$

$3 + \sqrt{6}$ $\quad$ $6\sqrt{30} + 9\sqrt{12}$
$- \sqrt{6} - 2.$ $\quad$ $-10\sqrt{15} - 15\sqrt{6}$

$3 - 2 = 1$

Mais si les signes radicaux sont differens, il faut avant toute chose réduire les quantités à la même dénomination, comme aux fractions ainsi $\sqrt[m]{x^n}$. $\sqrt[r]{y^s}$. donneront $\sqrt[mr]{x^{nr}}$. $\sqrt[mr]{y^{ms}}$.

$\sqrt[3]{8}$ $\quad$ $\sqrt[2]{9}.$
$\sqrt[6]{64}$ $\quad$ $\sqrt[6]{729}$

$\sqrt[6]{46656} = 6 = 2,3$

Où on peut encore remarquer une expression de ces sortes de quantités, où il ne paroît point de signe radical $x^{n:m}$ & $y^{s:r}$

IX. Moyennant ces premiers principes du Calcul Literal on peut trouver avec assez de facilité la construction & les proprietés de toutes les Puissances, & les extractions de leurs Racines; celles des Proportions & des Progressions soit Arithmetiques, Géometriques, Harmon. ou Contreharmon. La sommation des Progressions Ari-

thmetiques quelconques, qui donnent les nombres Polygonaux, Pyramidaux, &c. comme aussi les Variations, les Combinaisons, & les Conjectures des hazards, &c. Mais le principal est la connoissance des Equations, & de leur résolution, qui s'applique aux problémes ou questions, soit Arithmétiqes ou Géometriques; & les unes & les autres déterminées ou indéterminées.

CHAPITRE PREMIER.

Des Equations, de leur Nature, & de leurs Transformations.

I. UNe Equation est une expression d'une même quantité en deux valeurs differentes, qui se déduit des conditions du problême proposé. Pour y venir on distingue 1°. d'abord les quantités connuës d'avec les inconnuës, nommant les premieres par les premieres lettres de l'Alfabet, & les secondes par les dernieres. 2.° On cherche tant d'égalités que le problême contient d'inconnuës. Si cela ne se peut, c'est une marque que la question est indéterminée. 3°. On fait ensorte que la quantité inconnuë reste seule d'un côté, & que de l'autre il n'y ait que des quantités connuës, ce qui se fait ordinairement ou par l'Addition ou par la Soustraction, la Multiplication, la Division; par l'Extraction de quelque racine, ou par l'Elevation à quelque puissance.

II. Si le problême est Géometrique on le suppose d'abord comme fait; & comparant les rapports de toutes les lignes sans avoir égard si les grandeurs comparées sont connuës ou inconnuës, on trouvera finalement leur relation

Digitized by Google

tion fondée sur quelque rectangle ou quelques triangles semblables, &c. Conformément à quelque theorême de la Géometrie élementaire ; & enfin la derniere ou avantderniere Equation fournira le moyen de faire la Construction géometrique.

III. Lorsqu'il y a plusieurs inconnuës dans un problême, on en fait évanoüir tant que l'on peut par le moyen de la substitution, qui se fait en dégageant quelqu'une des inconnuës, & mettant sa valeur, que l'on trouve par-là, dans les autres équations de la question proposée; ou en comparant ensemble les valeurs d'une même inconnuë dans plusieurs équations du problême. Quelquefois cette substitution saute d'elle-même aux yeux, ou elle se trouve moyennant une petite operation de quelquune des premieres régles de l'Arithemetique.

Voici quelques exemples de Problêmes. Soit le premier Arithmetique. Etant donné la somme de deux nombres, & la somme de leurs quarrés, trouver chacun de ces nombres séparément. Soit la premiere somme $10 = a$. La seconde $58 = b$. La moitié de la difference des deux nombres $= y$.

Donc le plus grand $\frac{1}{2} a + y$
Le moindre $\frac{1}{2} a - y$

La somme $= a$

Le quarré du grand $\frac{1}{4} aa + ay + yy$
Le quarré du petit $\frac{1}{4} aa - ay + yy$

La somme $\frac{1}{2} a^2 + 2 y^2 = b$

$$2yy = b - \tfrac{1}{2}a^2$$

$$yy = \frac{b - \tfrac{1}{2}a^2}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{b - \tfrac{1}{2}aa}}{2} = \frac{\sqrt{58-50}}{2} = 2$$

Exemple Geometrique.

Fig. 1. Dans un Cercle donné accommoder une ligne droite donnée KL, laquelle prolongée rencontre la tangente du Cercle HI au point donné H.

Soit la ligne KL $= a$. HI $= b$ LH $= y$

On aura $ay + yy = bb$

$$\tfrac{1}{4}a^2 \qquad \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 + ay + yy = bb + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\tfrac{1}{2}a + y = \sqrt{bb + \tfrac{1}{4}a^2}$$

$$y = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{bb + \tfrac{1}{4}a^2}$$

Exemple de Trigonometrie.

Etant donné la surface & un des angles aigus d'un triangle rectangle, trouver les côtés. Soit la surface $= bb$, un des côtés $= x$, l'autre sera $= \frac{2bb}{x}$ Sinus total $= r$ la Tangente $= t$.

On aura $r : t = x : \frac{2bb}{x}$

Donc $tx = \frac{2rbb}{x}$

$tx^2 = 2rbb$

$x^2 = \frac{2rbb}{t}$

$x = \sqrt{2rbb : t}$

Ainsi prenant r & t à discretion sur l'angle proposé, & cherchant à t & b la troisiéme proportionelle p, & entre p & $2r$ la moyenne, on trouvera x.

IV. Dans les problêmes indéterminés y ayant deux inconnuës que l'on ne peut point faire évanoüir, on peut supposer à la place de l'une une grandeur arbitraire à discretion, moyennant laquelle on pourra déterminer la valeur de l'autre inconnuë. Mais comme il est de l'élegance de l'operation & quelquefois de la condition du problême de ne trouver que des nombres entiers, on y parvient par une suite de suppositions de termes, qui naissent de la division des termes inconnus, poussée moyennant des indéterminées, jusqu'à ce qu'on n'en puisse plus faire. Par exemple ; $45x = 14y + 28$. Dont voici l'operation :

$$45x - 28 = 14y.$$

14 ————

$$3x + r = y$$

———— 14

Donc $42x + 14r = 45x - 28$

$$14r = 3x - 28$$

$$14r + 28 = 3x$$

3 ————

$$4r + s = x$$

———— 3

Donc $12r + 3s = 45r + 28$

$$3s = 2r + 28$$

$$2r = 3s - 28$$

2 ————

$$r = s + t$$

———— 2

Donc $2s + 2t = 3s + 28$

$$2t = s + 28$$

D'où on tire $s = 2t + 28$

$$r = s + t$$

$$x = 4r + s$$

$$y = 3x + r$$

Substit $x = 5s + 4t$

$$x = 14t + 140$$

Après les Substit $y = 41t + 5448$

Ainsi on pourra dans la place de la derniere indéterminée t substituer facilement un nombre entier, qui puisse satisfaire à la question.

V. Les questions sont appellées du premier, second, troisiéme, ou autre degré, suivant la plus haute puissance, où l'inconnuë s'y trouve élevée; & alors chaque valeur de l'inconnuë s'appelle une racine. On forme ces équations en rendant chaque valeur simple de l'inconnuë égale à o; ce qui se fait en transportant le second membre de

Digitized by Google

l'équation du côté de l'inconnuë sous un signe contraire. Il arrive de-là que ces racines sont ou réelles, ou imaginaires; & les réelles sont ou vrayes, c'est-à-dire, positives, lorsque l'inconnuë est égale à une quantité positive, comme $x = a$ ou $x - a = 0$, ou elles sont fausses, c'est-à-dire, négatives, lorsque la quantité inconnuë est égale à une grandeur négative, comme $x = - b$, ou $x + b = 0$. Ces racines fausses ne font que changer la construction du problême; mais les racines imaginaires comme $x = \sqrt{-a^2}$ font voir que le problême est du moins de ce sens-là impossible.

VI. Afin qu'une équation soit bien arrangée ou ordonnée, il faut que la plus haute puissance de l'inconnuë se trouve dans le premier terme, & qu'elle diminuë de suite dans les autres, jusqu'à ce que le dernier terme se trouve tout composé de quantités connuës. On remarque dans cet arrangement, qu'il y a tant de racines vrayes, qu'il y a de changements de suite dans les signes $+$ & $-$, & qu'il y en a tant de fausses, que le même signe se trouve de suite. On y remarque encore que le premier terme ne contenant que la plus haute puissance de l'inconnuë, le second a pour coëfficients la somme de toutes les racines, le troisiéme les produits de deux & deux de ces racines, le quatriéme les produits de trois en trois, &c. & enfin le dernier est le produit de toutes les racines.

VII. Une équation étant donnée, on peut la changer en une autre; soit qu'on veuille augmenter ou diminuer chacune de ses racines d'une quantité connuë, ou la multiplier ou diviser ou au contraire; ou bien faisant que les valeurs de l'inconnuë soient des racines telles

qu'on voudra de celles de la propoſée; ou même enſorte que la racine de la propoſée ſoit à une autre en une certaine raiſon donnée. Dont voici des exemples:

Pour l'Addition ſoit $x^3 + 9x^2 + 16x + 24 = 0$, dont la racine doit être augmentée de 3, de ſorte que $x + 3 = y$ ou $x = y - 3$, on ſubſtituera à la place de x & de ſes puiſſances, celle de $y - 3$, & de ſes puiſſances; ce qui donne uue Transformée, dont l'inconnuë $y = x + 3$. Voici l'operation :

$$\begin{array}{rcrrrr} x^3 & = & y^3 & -9y^2 & +27y & -27 \\ +9x^2 & = & & +9y^2 & -54y & +81 \\ +26x & = & & & +26y & -78 \\ +24 & = & & & & +24 \\ \hline & & y^3 & * & -y & =0 \end{array}$$

Pour la Souſtraction c'eſt la même choſe. Soit, par exemple, dans l'équation $x^3 - 6x^2 + 12x - 10 = 0$, la racine à diminuer de 3, on aura $x - 3 = y$, ou $x = y + 3$, & ſes puiſſances à ſubſtituer. Ce qui ne ſouffre pas de difficulté.

Pour la Multiplication ſoit $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, & la racine x à multiplier par a, enſorte que $ax = y$ ou $x = \frac{y}{a}$ on aura après les ſubſtitutions néceſſaires $\frac{y^3}{a^3} - \frac{py^2}{a^2} + \frac{qy}{a} - r = 0$, pour la transformée, dont il faut rendre le premier terme pur, ce qui ſe fait en multipliant le tout par a^3. Ceci a donné lieu à la méthode dont on ſe ſert communement, & qui conſiſte à multiplier les

Digitized by Google

termes conſecutifs de l'équation propoſée par ceux d'une progreſſion géometrique, dont le premier terme eſt l'unité, le ſecond la grandeur par laquelle on veut que la racine ſoit multipliée, &c. par exemple ;

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0 \qquad\qquad x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$$
$$1. \quad a. \quad a^2. \quad a^3 \qquad\qquad 1. \quad 2. \quad 4. \quad 8. \quad 16.$$
$$y^3 - apy^2 + a^2qy - a^3r = 0 \qquad\qquad y^4 + 8y^3 - 76y^2 - 848y - 1920 = 0$$

Pour la Diviſion ſoit :

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$
$$a^3y^3 - a^2py^2 + aqy - r = 0$$
$$a^3$$
$$y^3 - \frac{py^2}{a} + \frac{qy}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0$$

& ſupp. $x : a = y$ ou $x = ay$ Et par le moyen de la Progreſ. Geom.

$$x^3 * + 36x - 54 = 0 \;\&\; x : 3 = y.$$
$$1. \; 3. \quad 9. \quad 27.$$
$$y^3 * + 4y - 2 = 0$$

On peut transformer de même ſuppoſant $a : x = y$; car cela donnera $a = xy$ & $\frac{a}{y} = x$

Pour transformer la propoſée $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ enſorte que $y = \sqrt{x}$, ou bien $y = \sqrt[3]{x}$, on aura $x = yy$ ou $x = y^3$, & la transformée dans le premier cas $y^6 - py^4 + qy^2 - r = 0$, & dans le ſecond cas $y^9 - py^6 + qy^3 - r = 0$.

Pour transformer la propoſée, enſorte que ſa racine ſoit à celle de la transformé, par exemple comme m eſt à n, on aura

$$x : y = m : n$$

$$x n = m y$$

$$x = \frac{my}{n}$$

Donc

$$x^3 - p x^2 + q x - r = 0$$

$$\frac{m^3 y^3}{n^3} - \frac{pm^2 y^2}{n^2} + \frac{qmy}{n} - r = 0 \quad n^3.$$

$$m^3 y^3 - n p m^2 y^2 + n^2 q m y - n^3 r = 0 \quad m^3$$

$$y^3 - \frac{npy^2}{m} + \frac{n^2 qy}{m^2} - \frac{n^3 r}{m^3} = 0$$

VIII. Ces transformations ont differens usages, & elles servent communément pour rendre le premier terme pur, lorsque dans l'équation proposée il est embarassé de quelque coëfficient ; comme aussi pour ôter le second terme d'une équation, ce qui se fait en augmentant ou diminuant la racine de la proposée du coëfficient connu du second terme divisé par l'exposant de la puissance du premier terme, suivant que le second terme est positif ou négatif, par exemple, dans

$x^2 + 6x - p = 0$ on supposera $x + 3 = y$

ou $x = y - 3.$

Donc

Donc
$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & y^2 - 6y + 9 \\ +6x & = & +6y - 18 \\ +p & = & +p \\ \hline & & y^2 * -9 = 0 \\ & & +p \end{array}$$

On en peut voir la raiſon, ſi à la place de la formule génerale, par exemple, du troiſiéme degré $x^3 + pxx + qx - r = 0$. on en ſubſtituë une autre où $x = y - z$. Car on aura

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 - 3zyy + 3z^2y - z^3 \\ +pxx & = & +pyy - 2pzy + pz^2 \\ +qx & = & +qy - qz \\ -r & = & -r \end{array}$$

Où il eſt évident, que ſi le ſecond terme doit évanoüir, il faut que $p = 3z$, ou que $\frac{p}{3}$ doit être la grandeur connuë que l'on porte dans la nouvelle équation On voit encore par cette même formule, que pour faire évanoüir le troiſiéme terme il faut que $3z^2 - 2pz + q = 0$, & que par conſéquent $z^2 - \frac{2}{3}pz + \frac{1}{9}p^2 = \frac{1}{9}p^2 - \frac{1}{3}q$, & ainſi $z = \frac{1}{3}p + \sqrt{\frac{1}{9}p^2 - \frac{1}{3}q}$. Enfin ſi le ſecond terme manque dans une équation, on y peut faire évanoüir le pénultiéme en ſubſtituant pour x le dernier terme diviſé par y, par exemple, dans l'équation $x^3 * - 61x + 360 = 0$, on ſubſtituëra $\frac{360}{y} = x$, &c.

IX. On peut encore par le moyen de ces transforma-

tions ôter les fractions d'une équation ; faire que les termes ayent alternativement + & — ; comme aussi rendre complette une équation, où il manque quelque terme ; & même dans plusieurs cas ôter les incommensurables dans les coëfficiens des termes d'une équation. Dont voici quelques exemples :

Pour ôter les fractions d'une équation, on n'a qu'à multiplier ses termes de suite par une progression Géometrique, commençant par l'unité & capable de faire évanoüir les dénominateurs des fractions. Ce qui est la même chose que de multiplier la racine de l'équation par le second terme de ladite progression.

Exemple.

$$x^3 - x^2 + \tfrac{11}{63}x - \tfrac{1}{36} = 0$$

$$1. \quad 6. \quad 36 \quad 216.$$

$$y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0.$$

Ce même expedient de multiplier ou de diviser une équation, qui est embarassée d'incommensurables, par une progression, qui contient de ces incommensurables, peut servir en plusieurs cas à les faire évanoüir. Mais la régle n'est pas generale.

Exemples.

$$x^4 - a\,x^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 = 0.$$

$$1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{8} \quad 4 \qquad\qquad y = x\sqrt{2}.$$

$$y^4 - 2ay^3 + 16aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0.$$

$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$

1. $\sqrt[3]{2}$. $\sqrt[3]{4}$ 2 $y = x : \sqrt[3]{2}$

$y^3 - ay^2 + 2aby - \frac{1}{2}a^4b = 0$

$x^3 - x^3\sqrt{2} + 3\frac{1}{2}x - 3\sqrt{2}$.

1 $\sqrt{2}$ 2 $\sqrt{8}$.

Pour faire que les ſignes ſoient alternativement + & — lorſque tous les termes ont +, on change les ſignes des termes pairs, c'eſt-à-dire du ſecond, quatriéme, ſixiéme, &c. en —, & alors toutes les racines deviennent vrayes. Mais quand il y a des racines poſitives & négatives dans une équation, on change le plus grand coëfficient négatif en poſitif, on lui ajoûte l'unité, & ce terme $-y$ étant fait $= x$, on acheve le reſte par la ſubſtitution.

Exemples.

$xx - 2x - 3 = 0$ $x^3 - 2x^2 + 3x + 6 = 0$.

On peut remarquer encore, que ſi dans une équation numerique le dernier terme admet trop de facteurs ou diviſeurs, on y ſubſtituë ſucceſſivement + ou — 1, 2 3 4, &c. & remarquant ceux, où la ſomme des produits admet moins de diviſeurs, on en augmente ou diminuë la racine pour avoir une équation où le dernier terme admet moins de facteurs. Par exemple :

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0.$$

CHAPITRE SECOND.

De la Résolution des Equations.

I. L'On résoud une équation, lorsqu'on détermine la valeur de ses racines inconnuës. Ces racines sont ou rationnelles, c'est-à-dire, commensurables, ou incommensurables. Et comme le dernier terme d'une équation est le produit de la valeur de toutes les racines multipliées ensemble; il est évident, que si l'équation se divise exactement par l'inconnuë + ou — quelqu'un des facteurs du dernier terme, ce facteur sera une des racines commensurables de la proposée. D'où on tire une méthode génerale pour trouver les racines commensurables de toute équation de quelque degré qu'elle puisse être.

Exemples.

$$
\begin{array}{r|l}
x - 2\;)\; x^2 - 6x + 8 & x - 4 \\
x^2 - 2x & \\
\hline
-4x + 8 & \\
-4x + 8 & \\
\hline
0 \quad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 3x^2 - 13x + 14 = 0 & 5 \\
125 - 75 - 65 + 15 & 3 \\
\hline
\qquad 0 \qquad 0 & 1
\end{array}
$$

$x = 5.$

II. Toute équation du second degré, dont le second terme subsiste, est comprise dans l'une des quatre formules suivantes:

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x^2 + px - q = 0$$
$$x^2 - px + q = 0$$
$$x^2 - px - q = 0$$

Où il est évident, que si on porte le dernier terme, qui est tout connu, dans le dernier membre à la place de o, sous un signe contraire, ce qui reste dans le premier membre sera un quarré imparfait, que l'on rendra entier en y ajoûtant le quarré de la moitié du coëfficient connu du second terme; ajoûtant donc cette valeur de part & d'autre, & tirant la racine on aura la valeur de x. Par exemple :

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}pp = \tfrac{1}{4}pp - q$$

$$x + \tfrac{1}{2}p = \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q}$$ Ainsi on aura

Pour la premiere Form. $x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q}$

Pour la seconde $x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + q}$

Pour la troisième $x = +\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q}$

Pour la quatriéme $x = +\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + q}$.

On trouveroit encore les mêmes valeurs, si on faisoit évanoüir le second terme de chacune des quatre formules cy-dessus.

III. Lorsque le second terme d'une equation du troisiéme degré est évanoüi, il est evident que ces racines sont telles, que la plus grande doit être égale à la somme des deux autres; & cette plus grande est positive, si les deux autres sont négatives, ou au contraire. On connoit même qu'elle est positive, lorsque le dernier ter-

a le ſigne —. Ce qui ſe trouve aiſément par la conſtruction de l'équation. La formule génerale de ces équations peut être $x^3 * + px + q = 0$.

IV. On connoît encore que les deux racines moindres ſont égales, lorſque $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$ Car $\overline{x-f, x-f, x+2f}$ donnera pour penultieme terme $-3ffx$ & pour dernier $+2f^3$. Or $\overline{3ff}^3 = 27f^6$ & $\overline{2f^3}^2 = 4f^6$. Donc $\frac{f^3}{27} = \frac{qq}{4}$ Mais lorſque $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4} qq$ les trois racines ſont réelles & inégales Car $\overline{x \pm f + g, x \pm f - g, x \mp 2f}$ donne pour pénultieme terme $\begin{matrix} -g^2x \\ -3ffx \end{matrix}$ & pour dernier $\begin{matrix} \pm 2f^3 \\ \mp 2fg^2 \end{matrix}$. Or les ſignes des coëfficiens du pénultieme terme étant tous deux égaux, au lieu qu'il y a néceſſairement contrarieté dans les ſignes du dernier terme, on aura $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$. Enfin on trouve que dans le cas, où $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4} qq$, il y a deux racines imaginaires; de même que lorſqu'il y a $+p$; quant au q il eſt + s'il y a deux racines poſitives, & — s'il y en a deux négatives.

V. Lorſqu'on connoît qu'il y a deux racines égales dans une telle équation, on n'aura qu'à diviſer $3q$ par $2p$ & on aura la valeur de cette racine égale; puiſque $6ffx = 2px$ doit être égal à $6f^3 = 3q$ attendu qu'on a ſuppoſé $x = f$. Mais lorſque les trois racines ſont inégales, pourvû qu'elles ſoient commenſurables, ou qu'il y en ait au moins quelqu'une de commenſurable, on la peut

trouver auſſi. Et ſi c'eſt la plus grande, il y aura toujours un quarré parfait plus grand que p, duquel ôtant p, & diviſant q par le reſte, la diviſion ſe fait exactement, & le quotient ſera la racine $2f$, qui eſt celle de ce même quarré parfait. Car ſi de $4ff$ on ôte $3ff + g^2$ le reſte $ff - gg$ diviſera $2f^3 - 2fg^2$ préciſement en donnant pour quotient $2f$. Enfin ſi c'eſt une des moindres racines, qui ſoit commenſurable, il y aura toujours un quarré parfait moindre que p, lequel étant ôté de p, le reſte diviſe exactement le dernier térme q & donne pour quotient la valeur de la racine cherchée. Car $f - g$ ou $-f + g$ étant élevé au quarré on aura $f^2 - 2fg + g^2$, lequel étant ôté de $3f^2 + g^2$ le reſte $2f^2 + 2fg$ diviſera exactement le dernier terme , & donnera pour quotient $\pm f \mp g$. Par le moyen de ce qui vient d'être dit, on trouve toujours les racines d'une équation du troiſiéme degré, lorſqu'il y en a deux d'égales, & lorſque les trois ſont réelles, & qu'elles ſont commenſurables, du moins une. Mais lorſqu'elles ſont inégales & toutes incommenſurables, on en eſt au cas, que l'on appelle le cas irreductible. Dont voici un Exemple.

$$y^3 * - 12y - 12 = 0.$$

On en cherche les racines par approximation.

VI. Une des racines d'une équation du 3.^{me} degré étant incommenſurable & les deux autres imaginaires, on trouve l'expreſſion de la racine par la méthode ſuivante. On connoît aiſément, que les équations du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, ſe réduiſent à ces quatre cas, ſçavoir ;

$$x^3 = + px + q$$
$$x^3 = - px + q$$
$$x^3 = + px - q$$
$$x^3 = - px - q$$

On introduit dans chacune de ces formules deux grandeurs indéterminées, comme g & f, que l'on suppose telles que leur somme $g+f=x$, & que leurs cubes $g^3+f^3=\pm q$. Et alors on aura:

$$x=g+f$$

$$x^3=g^3+3g^2f+3gf^2+f^3$$

$$px=pg+pf=3g^2f+3gf^2$$

$g+f$

$$p=3gf$$

$3g$

$$p:3g=f$$

$$g^3+f^3=q \qquad f^3=p^3:27g^3$$

$$g^3+p^3:27g^3=q$$

g^3

$$g^6+\frac{p^3}{27}=qg^3$$

$$g^6-qg^3=-\tfrac{1}{27}p^3$$

$$\tfrac{1}{4}qq \qquad \tfrac{1}{4}qq$$

$$g^6-qg^3+\tfrac{1}{4}qq=\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3$$

$\sqrt{}$

$$g^3-\tfrac{1}{2}q=\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}$$

$$g^3=\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}$$

$$g=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}$$

$$g^3+f^3=q$$

$$f^3=q-g^3$$

$$f^3=q-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}$$

$$f=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}$$

Donc

Donc $g + \; = x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$

Dans les trois autres cas il n'y a autre changement que pour les ſignes ; de ſorte que la formule du deuxiéme cas eſt :

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

Dans le troiſiéme cas :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$$

& dans le quatriéme,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

On voit que la premiere & la troiſiéme de ces formules ne ſe peuvent préſenter ſans imaginaires que dans les cas où $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. Car ſoit, par exemple, $x^3 - 7x + 6 = 0$, on aura ſelon la troiſiéme formule :

$$x = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-3\tfrac{19}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-3\tfrac{19}{27}}}$$

VII. Il ſe trouve un grand inconvenient dans cette methode, en ce que la racine que l'on cherche ſe préſente toujours ſous une forme incommenſurable & même imaginaire, quoiqu'en effet elle ſoit commenſurable. C'eſt pourquoi on ſe ſert de la méthode ſuivante pour extraire la racine d'une grandeur compoſée d'un nombre entier, & d'un autre compris ſous un ſigne radical. Elle conſiſte à y ſubſtituer deux indeterminées affectées de

même, dont on compare ensuite les valeurs. Soit, par exemple, à chercher $\sqrt[3]{3+\sqrt{\frac{242}{27}}}$ on substituë $t+\sqrt{u} = \sqrt[3]{3+\sqrt{\frac{242}{27}}}$ & élevant l'un & l'autre membre à la troisiéme puissance, on aura $t^3 + 3t^2\sqrt{u} + 3tu + \sqrt{u^3} = 3 + \sqrt{\frac{242}{27}}$ après quoi supposant $t^3 + 3tu = 3$, & $3t^2\sqrt{u} + \sqrt{u^3} = \sqrt{\frac{242}{27}}$ on éleve l'une & l'autre équation au quarré, ce qui donnera:

$t^6 + 6t^4u + 9t^2u^2 = 9 = \frac{243}{27}$ & $9t^4u + 6t^2u + u^3 = \frac{242}{27}$

Et soustraïant la seconde de la premiere il restera

$$t^6 - 3t^4u + 3t^2u^2 - u^3 = \frac{1}{27}$$

$$\sqrt[3]{}$$

$$t^2 - u = \frac{1}{3}$$

$t^2 - \frac{1}{3} = u$ Cette valeur d'u étant substituée dans $t^3 + 3tu = 3$

On aura $4t^3 - t = 3$

$$4 \quad t^3 * - \frac{1}{4}t = \frac{3}{4}$$

1. 2. 4. 8.

Et multipliant t par 2 pour avoir $2t = z$

$z^3 * - 1z = 6.$ ou $z = 2t = 2$

$t = 1.$

& $u = \frac{2}{3}$

par conséquent $\sqrt[3]{3+\sqrt{\frac{242}{27}}} = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$

Digitized by Google

VIII. Dans les équations du quatriéme degré dont le second terme est évanoüi, & qui peuvent être représenté sous la formule generale $x^4 * + px^2 + qx + r = 0$. Lorsque les quatre racines sont égales, on aura $\frac{1}{4} pp = r$. Et alors une telle équation n'est proprement que du second degré. Ce qui est évident par la construction. Car $\overline{x - f}^2, \overline{x + f}^2$ donne $x^4 - 2ffx^2 + f^4$, où $2ff = p$. $f^4 = r$. Dans celles où il y a trois racines égales la construction de $\overline{x \mp f}^3, x \pm 3f$ donne $x^4 - 6ffxx \pm 8f^3x - 3f^4$ & comparant ce produit à la formule generale on y trouvera toujours $\frac{pp}{12} = r$. Enfin quand il n'y en a que deux d'égales, si on fait la construction de $\overline{x \mp f}^2 \times \overline{x \pm f + h}, \overline{x \pm f - h}$ on trouvera $x^4 * \begin{matrix} -h^2x^2 + \\ -2ffx^2 - \end{matrix} 2fh^2x \begin{matrix} +f^4 \\ -ffh^2 \end{matrix} = 0$, où ayant $p = 2ff + hh$, & $r = f^4 - ffhh$, si dans cette derniere on substituë à la place de hh, sont égale $p - 2ff$, on trouvera $f = \sqrt{+\frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} \pm \frac{r}{6}}}$ La varieté des signes vient suivant que les racines égales sont positives ou négatives, ou que les inégales sont réelles ou imaginaires.

IX. On se sert de differentes methodes pour trouver les racines des équations du quatriéme degré; dont outre celle qui se fait en divisant l'équation proposée

par x + ou — quelqu'un des facteurs du dernier terme, ensorte que la division se fasse sans reste, par le moyen de quoi l'équation est réduite à un moindre degré, & par conséquent une racine trouvée, si elle est commensurable; nous n'en donnerons qu'une, qui consiste à réduire une équation du quatriéme degré, dont le second terme manque, en une autre du troisiéme degré. Après quoi cette réduite se pourra résoudre suivant ce que nous avons dit ci-dessus. Pour cet effet, on sçait, que toute telle équation du quatriéme degré est formée par la multiplication de deux équations quarrées; lesquelles on suppose être $x^2 + fx + g = 0$. Et $x^2 - fx + h = 0$ Dont le produit donne

$$x^4 * + gx^2 - fgx + gh = 0$$
$$- ffx^2 + fhx$$
$$+ hx^2$$

Or les termes de cette nouvelle équation étant comparés à ceux de l'équation génerale, on aura les équations suivantes :

$$g + h - ff = p$$

$$p + ff = g + h$$

$$p + ff - h = g$$

$$fh - fg = q.$$

$$f \quad h - g = q : f$$

$$\left\{\begin{array}{l} h+p-ff+h \\ 2h-p-ff \end{array}\right\} q:f$$

$$2h=p+ff+q:f$$

$$h=\frac{p+ff+q:f}{2} \qquad gh=r$$

Cette valeur de h étant substitué dans l'équation $p+ff-h=g$ on aura

$$\frac{2p+2ff-p-ff-q:f}{2} \text{ ou } \frac{p+ff-q:g}{2}=g$$

Donc $gh=\dfrac{p+ff-q:f}{2}\times\dfrac{p+ff+q:f}{2}=\dfrac{p^2+2pff+f^4-q^2:f^2}{4}=r$

$$\underline{\qquad\qquad 4ff}$$

$$p^2f^2+2pf^4+f^6-q^2=4ffr,$$

$$f^6+2pf^4+p^2f^2-qq=0$$
$$-4rf^2$$

Et voici une réduite du troisiéme degré, dont ff est l'inconnuë, & dans laquelle substituant les valeurs de p, q, r, on pourra trouver celle de ff ou f, Et celle-ci étant substituée dans les dernieres équations de g & de h, on substituëra les valeurs de ces dernieres quantités dans les deux équations du deuxiéme degré, que l'on avoit supposé du commencement. Après quoi le reste s'acheve facilement, par ce qui a été montré aux équations du second degré. Voici quelques exemples. Soit $x^4 * -32x^2 + 5x + 12 = 0$, dans cette équation on aura $p=+32$, $q=+5$, $r=+12$. Donc la

reduite eſt $f - 64f + 976f^2 - 25 = 0$. laquelle ſe diviſant ſans reſte par $ff = 25$ on aura $ff = 25$, ou $f = 5$. & par conſéquent $g = \frac{-32 + 25 - 1}{2} = -4$ & $h = \frac{-32 + 25 + 1}{2} = -3$.

Soit $x^4 - 86x^2 + 600x - 851 = 0$. La réduite ſera $f^6 - 172f^4 + 10800f^2 - 360000$, qui ſe diviſe par $ff - 100$. Donc $6 = -23$. $h = 37$.

Troiſiéme exemple, $x^4 - 18x + 24x - 3 = 0$. La réduite ſe diviſe par $ff - 12$.

Quatriéme exemple, $x^4 - 4x^2 - 4x + 15 = 0$. La téduite ſe diviſe par $ff - 4$.

La brieveté que l'on s'eſt propoſé dans le préſent cahier eſt cauſe que nous ne parlons point des équations du cinquiéme, ſixiéme, ou autres degrés plus élevés, dont outre cela l'uſage eſt aſſez rare.

X. Nous avons encore à remarquer, que lorſque dans une équation il y a deux ou pluſieurs racines égales & poſitives, on la peut abaiſſer d'un ou de pluſieurs degrés, en multipliant ſes termes de ſuite par une progreſſion arithemetique, qui va en diminuant, & dont le premier terme eſt égal à l'expoſant de la plus haute puiſſance de l'inconnuë, Par exemple,

A $\quad x^3 + 3x^2 - 45x + 81$

$\quad\quad 3 \quad\quad 2 \quad\quad 1 \quad\quad 0$

$\quad 3x^3 + 6x^2 - 45x \;\ldots\; 0 = 0$

$3x$

B $\quad x^2 + 2x - 15 = 0$

Digitized by

Dans cette abaiſſée B, il y aura encore le même nombre de racines égales moins une.

Après ceci ſi on multiplie la même équation A par une autre progreſſion arithmetique négative, dont le premier terme eſt moindre d'une unité, que l'expoſant du premier terme de la propoſée, s'il y a deux racines égales & poſitives, on trouvera une ſeconde équation. Et il arrivera que ces trois équations, c'eſt-à-dire, la propoſée, & ces deux que l'on vient de trouver, auront un diviſeur commun, qui ſera juſtement la racine égale, du moins lorſque cette racine ſera commenſurable. Par Exemple.

A	x^3	$+ 3x^2$	$- 45x$	$+ 81$	$= 0$
	$- 2$	$- 1$	0	$+ 1$	
C	$-2x^3$	$- 3x^2$	$*$	$+ 81$	$= 0$

Le diviſeur commun des équations A, B, C ſera $x - 3$.

On trouve cette méthode en ſuppoſant pour la racine égale une grandeur indéterminée f. Et multipliant $x - f = 0$ tant de fois qu'il y a de racines égales, par exemple, juſqu'à $x^2 - 2fx + ff$, s'il y en a deux, & diviſant enſuite par ce produit une formule génerale, par exemple, du troiſiéme degré, comme $x^3 + nx^2 + px + q = 0$ juſqu'à ce qu'on en vienne à un reſte, qui ſoit d'un degré moindre que le diviſeur. Car ce reſte en y ſubſtituant les coefficiens de la propoſée, & remettant x à la place de f, donnera dans les termes conſécutifs les deux équations que l'on vient de trouver.

S'il y a trois racines égales dans une équation du troi-

ſiéme degré, on peut trouver trois telles équations. Mais il faut alors que l'on faſſe les multiplications par le produit des progreſſions arithmetiques ſuivantes.

	3.	2.	1.	0
	2.	1	0	— 1
	6.	2.	0.	0.
2	3.	1.	0.	0.

3.	2.	1.	0.
— 1.	0	+ 1	+ 2
— 3.	0	+ 1	0

	2.	1.	0.	— 1
	1.	0	— 1	— 2
	2.	0.	0.	+ 2
2	1.	0.	0.	1.

S'il y a trois racines égales dans une équation du quatriéme degré, on trouve encore trois équations ; mais les multiplications ſe doivent faire par les produits des progreſſions ſuivantes

	4.	3.	2.	1.	0
	3.	2	1	0	— 1
	12.	6.	2.	0.	0
2	6.	3.	1.	0.	0

4.	3.	2.	1.	0
— 2	— 1.	0	+ 1	+ 2
— 8.	— 3.	0	+ 1	0.

	3.	2.	1.	0	— 1
	2	1	0	— 1	— 2
	6.	2.	0.	0.	2
2	3.	1.	0.	0.	1.

Exem. $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$. a deux racines égales.
$x^4 - 4x + 3 = 0$ a deux racines égales.
$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$ a trois racines égales.

Si les racines égales ſont incommenſurables, on abaiſſera à la vérité la propoſée ; mais on ne trouvera pas de diviſeur commun à la propoſée & à toutes celles qu'on a trouvé en abaiſſant.

XI. On ſe ſert de cette méthode de la multiplication des termes d'une équation propoſée, par une progreſſion arithmetique, dont le premier terme eſt égal à l'expoſant

posant de la plus haute puissance de l'inconnuë de la proposée, pour approcher autant que l'on veut de la valeur des racines de la proposée, principalement lorsqu'elles sont incommensurables. On pousse cet abaissement jusqu'à une équation linéaire, & on trouve par ce moyen les limites desdites racines. Pour cet effet il faut que la proposée ait tous ses termes, qu'ils soyent sans fractions & sans incommensurables, & même alternativement sous les signes + & —, & que son premier terme n'ait d'autre coëfficient que l'unité. Voici des exemples.

Soit l'equation $x^3 - 18x^2 + 99x - 162 = 0$ dont on veut chercher les racines par approximation : posez

$$\text{A.} \quad x^3 - 18x^2 + 99x - 162 = 0$$
$$3. \qquad 2. \qquad 1. \qquad 0.$$
$$3x^3 - 36x^2 + 99x = 0$$
$$3x$$
$$\text{B} \quad x^2 - 12x + 33 = 0$$
$$2. \qquad 1. \qquad 0.$$
$$2x^2 - 12x = 0$$
$$2x$$
$$\text{C} \quad x - 6 = 0$$

La derniere équation C nous donne 6 pour la limite moyenne des deux racines de l'équation des limites B, dont la moindre sera o, & pour la plus grande on suppose le plus grand coëfficient négatif de ladite équation B, qui est ici 12, que l'on augmente de l'unité, ce qui sera 13. Substituant a présent ces trois limites o, 6, 13 à

la place de x, dans l'équation B, la premiere donnera +, la seconde —, & la troisiéme +. Ainsi pour approcher de la moindre racine qui doit être entre 0 & 6, on prend le milieu arithmetique 3, & substituant cette valeur à la place de x, on trouve qu'elle donne +; par consequent elle est encore trop petite. Ainsi prenant encore un milieu entre 3 & 6, comme 4, & substituant ses valeurs, on trouve qu'elles donnent encore +; mais prenant 5, on trouve que sa substitution donne —, d'où on conclud que la petite racine de B est entre 4 & 5. La même chose étant faite pour les nombres moyens entre entre 6 & 13, on trouvera la plus grande racine de la même équation B, entre 7 & 8; après quoi on n'aura qu'à se servir de ces racines approchées de l'équation B, pour limites des racines de la proposée A; qui seront par consequent 0, 4, 7, 163, ou 0, 5, 8, 163, & faisant la même recherche pour les nombres moyens entre les limites proposées, on trouvera finalement, que les racines de la proposée, dont les substitutions donnent 0, sont 3, 6, & 9.

XII. Lorsque les racines de la proposée ne se déterminent pas précisement, & que par consequent elles sont incommensurables; on en approche pourtant autant qu'on veut en multipliant l'inconnuë de la proposée par 10, 100, 1000, ou telles autres parties décimales que l'on veut, c'est-à-dire en ajoûtant au second terme un, deux, ou trois zéros, & au troisiéme deux fois autant, au quatriéme trois fois autant, &c. Après quoi on continuë l'operation comme ci-dessus, *Par exemple*.

$$x^2 - 8x + 13\tfrac{2}{3} = 0$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; 100$$

$$x^2 - 800x + 136666\tfrac{2}{3} = 0$$

La moindre racine se trouvera entre $2\frac{47}{100}$, & $2\frac{46}{100}$. Il y a encore d'autres méthodes pour approcher infiniment les racines d'une équation proposée ; mais elles sont trop composées pour trouver leur place ici.

XIII. On remarque dans cette approximation, que si dans une équation de limites, on trouve une racine approchée, dont la substitution donne o, cette racine sera en même tems une de celles de la proposée, & celle-ci aura encore une égale. Par Ex. Dans $x^3 - 21x^2 + 144x - 324 = 0$. on aura pour premiere équation des limites $x^2 - 14x + 48 = 0$. & la linéaire $x - 7$. donc ses limites seront o. 7. 15. & la plus petite racine qui se trouve entre o & 7. étant justement le nombre 6. dont les valeurs substituées donnent o. la proposée aura deux racines chacune $= 6$.

XIV. On remarque encore, que si l'on substituë de suite dans une équation au lieu de x, & de ses valeurs, les limites qui doivent servir à déterminer les racines de cette équation, depuis la premiere, qui est o, & leurs valeurs ; & que les substitutions ne donnent pas des signes alternatifs de suite ; il y aura sûrement dans l'équation des racines imaginaires, lesquelles n'y pourront être qu'en nombre pair. Et telle chose se trouvant dans une équation de limites, il arrivera encore que dans les suivantes jusqu'à la proposée il se trouve de même des imaginaires. *Par Exemple.*

A $x^4 - 12x^3 + 68x^2 - 192x + 288 = 0.$
4. 3. 2. 1. 0.

B $x^3 - 9x^2 + 34x - 48 = 0$
3. 2. 1. 0.

C $x^2 - 6x + 11\frac{1}{3} = 0$
2. 1. 0.

D $x - 3 = 0$

Les limites de C feront o. 3. 7. mais dans la substitution o donnant +, & 3 donnant aussi + on en infere, qu'il y a des imaginaires jusques dans la proposée. Et quoy que dans cet exemple 3. soit un racine exacte de l'équation des limites B. neantmoins comme il arrive que ce nombre 3. étant substitué dans A, donne + pendant que la limite o. qui le précede immediatement y donne + aussi, on en conclud que la proposée ne contient que 4 racines imaginaires, & que par consequent le probleme est impossible & renferme contradiction.

XV. Cette methode de determiner les limites d'une équation peut devenir longue & difficile lors qu'il faut transformer la proposée suivant les condition de l'onzieme article; ainsi on pourra dans plusieurs cas se servir des formules qui naissent de la maniere qui suit. Soit l'équation

$$x^2 + px - q = 0$$

On aura $x^2 + px = q$

$px < q.$

$x < q:p.$

de même $x^2 + px = q$

$q > xx$

$\sqrt{q} > x$

$(\sqrt{q} + p), x > x^2 + px.$

$(\sqrt{q} + p), x > q.$

$x > q : (\sqrt{q} + p)$

Donc les limites de la proposée sont $q:p.$ & $q : (\sqrt{q} + p.)$

Soit $x^2 - px + q = 0$

On aura $x^2 + q = px$

$x^2 < px$

$x < p.$

de même $x^2 = px - q$

$px > q$

$x > q:p.$

Soit $x^2 - px - q = 0$

On aura $x^2 = px + q$

$x^2 > q.$

$x > \sqrt{q}.$

$x\sqrt{q} > q$

Donc $x^2 < px + x\sqrt{q}$

$x < p + \sqrt{q}.$

De même $x^2 > px$

$x > p.$

$px > p^2$

$x^2 > p^2 + q$

$x > \sqrt{p^2 + q}$

Soit $x^3 - qx + r = 0$

On aura $x + r = qx$

$qx > r$

$x > r : q$

De même $x^3 < qx$

$x^2 < q$

$x < \sqrt{q}$

Soit $x^3 + qx - r = 0.$

On aura $x^3 + qx = r$

$qx < r.$

$x < r : q.$

De même $r > x^3.$

$r^{1:3} > x$

$xr^{2:3} > x^2$

$xr^{2:5} + qx > r$

$x > r : (r^{2:3} + q)$

Soit $x^3 - qx - r = 0$

$x^3 - qx = r$

$x^2 > q.$

$x > \sqrt{q}$

De même $x^3 = qx + r$

$x^3 > r.$

$x > r^{1:3}$

$x^2 > r^{2:3}$

$x^3 > xr^{2:3}$

$xr^{2:3} - qx < r.$

$x < r : \overline{r^{2:3} - q}.$

Soit $x^3 - px^2 + qx - r = 0$

On aura $x^3 - px^2 = r - qx$ donc si $x > p$. on aura aussi $r > qx$ & par consequent $x < r : q$. Mais si $p > x$ on aura aussi $qx > r$ & par consequens $x > r : q$ ainsi dans l'un & l'autre carés les limites seront p. & $r : q$.

Soit $x^3 - px^2 - qx + r = 0$

On aura $x^3 + r = px^2 + qx$

$px^2 + qx > r.$

$x^2 + qx : p > \frac{r}{p}.$

$x^2 + \frac{q}{p}x + \frac{q^2}{4p^2} > \frac{r}{p} + \frac{q^2}{4p^2}$

$x + \frac{q}{2p} > \sqrt{\frac{r}{p} + \frac{q^2}{4p^2}}$

$x > \sqrt{\frac{r}{p} + \frac{q^2}{4p^2}} - \frac{q}{2p}$

De même $px^2 + qx > x^3$

$px + q > x^2$

$q > x^2 - px$

$q + \frac{1}{4}p^2 > x^2 - px + \frac{1}{4}p^2$

$\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2} > x - \frac{1}{2}p.$

$x < \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2} + \frac{1}{2}p.$

Soit $x^3 + px^2 - qx - r = 0$

On aura

$x^3 + px^2 = qx + r$

$px^2 < qx + r$

$x^2 < \frac{qx + r}{p}$

$x^2 - \frac{q}{p}x < \frac{r}{p}$

$x^2 - \frac{q}{p}x + \frac{q^2}{4p^2} < \frac{r}{p} + \frac{q^2}{4p^2}$

$x - \frac{q}{2p} < \sqrt{\frac{r}{p} + \frac{q^2}{4p^2}}$

$x < \sqrt{\frac{r}{p} + \frac{q^2}{p4^2}} + \frac{q}{2p}$

De même $x^3 + px^2 > qx.$

$x^2 + px > q$

$x^2 + px + \frac{p^2}{4} > q + \frac{1}{4}p^2$

$x + \frac{1}{2}p > \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$

$x > \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2} - \frac{1}{2}p.$

Soit

Soit $x^4 - qx^2 - rx - s = 0$

On aura $x^4 - qx^2 = rx + s$

$x^2 > q$.

$x > \sqrt{q}$

De même $x^4 - rx = qx^2 + s$

$x^3 > r$.

$x > r^{1:3}$

Enfin puisque $x^4 - s = qx^2 + rx$

$x^4 > s$

$x > s^{1:4}$

$x^3 \; s^{1:4} > s$

Et parce que $x^4 = qx^2 + rx + s$

On aura $x^4 > x^3 q^{1:2} + x^3 r^{1:3} + x^3 \; s^{1}$

$x > q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$

XVI. Si dans une équation il y a deux inconnuës, comme x & y, on peut trouver la valeur approchée de l'une de ses racines comme x. si on substituë à sa place une suite infinie de grandeurs, qui soient les puissances de l'autre inconnuë, ou de quelqu'une des grandeurs con-

nuës de la proposée; chacune de ces puissances ayant pour coëfficient une indéterminée, que l'on suppose telle, que chaque terme de l'équation transformée, qui en naîtra, soit $=0$. Ce qui donnera le moyen de déterminer les valeurs de ces indéterminées. Les termes de la supposée sont tous sous le signe $+$. Voici un exemple. Soit l'équation proposée

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + nyx - y^3 \\ + nnx - 2n^3 \end{array}\right\} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} -2n^3 + n^2x + x^3 = 0 \\ \quad - y^3 + nyx. \end{array}$$

Pour trouver la valeur approchée de x, on suppose d'abord $x = ay^0 + by + cy^2 + dy^3 + ey^4$, &c. $a, b, c, d, e,$ &c. sont les indéterminées. On éleve x à la troisiéme puissance, ce qui donne

$$\left.\begin{array}{rl} x^3 = + a^3 + 3a^2by + 3abby^2 + b^3y^3 + & 3bbcy^4 \\ + 3acy^2 + 6abcy^3 + & 3accy^4 \\ + 3aady^3 + & 6abdy^4 \\ + & 3aaey^4 \end{array}\right\} \text{\&c.}$$

On substituë la valeur de x, & de x^3 dans la proposée, & on aura la transformée qui suit,

$$\begin{array}{l} -2n^3 = -2n^3 \\ -y^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots - y^3 \\ +nnx = +nna + nnby + nncy^2 + nndy^3 + nney^4, \text{ \&c.} \\ +nyx = \qquad + nay + nby^2 + ncy^3 + ndy^4, \text{ \&c.} \\ + \; x^3 = + a^3 + 3aaby + 3ab^2y^2 + b^3y^3 + 3bbcy^4, \text{ \&c.} \\ \qquad + 3aacy^2 + 6abcy^3 + 3accy^4, \text{ \&c.} \\ \qquad + 3aady^3 + 6abdy^4, \text{ \&c.} \\ \qquad + 3aaey^4, \text{ \&c.} \end{array}$$

Digitized by Google

Chaque terme de cette équation étant $=0$, on aura les équations particulieres qui suivent, & par le moyen desquelles on trouve les valeurs des indéterminées.

La I.e $a^3 + nna - 2n^3 = 0$. La II.e $3aab + nnb = -na$. La III.e $3aac + n^2c = -3aab - nb$. La IV.e $3aad + nnd = 6abc - b^3 - nc + 1$. La V.e $nne + 3aae = 3bbc - 3acc - nd - 6abd$.

La premiere a pour diviseur exacte $a - n = 0$, & la divisant par $a - n$ on trouve le quotient $aa + na + 2nn$, dont les deux racines sont imaginaires ; ainsi a n'a qu'une valeur réelle, qui est $+n$.

Par la seconde on trouve $b = -\frac{1}{4}$. Par la troisiéme $c = +\frac{1}{64n}$. Par la quatriéme on trouve $d = +\frac{131}{512n^2}$. Par la cinquiéme on trouve $e = +\frac{509}{16384n^3}$.

Donc substituant ces valeurs des indéterminées a, b, c, &c. à leur place dans $x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4$, &c. on aura $x = +n - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64n}y^2 + \frac{131}{512n^2}y^3 + \frac{509}{16384n^3}y^4$ &c. Cette valeur de x peut encore être approchée à l'infini. On a mis dans la valeur supposée de x, pour premier terme ay^0 ou a, à cause du terme connu $2n^3$ de la proposée. On suppose de plus que dans la proposée la valeur de n surpasse celle de y. Car de cette maniere les fractions de la transformée vont toujours en diminuant ; au lieu que si on sçavoit que y surpasse n, il faudroit faire la supposée $x = a + bn + cn^2 + dn^3$, &c.

Voici encore un second Exemple, qui peut donner quelque idée au commençans, sans néanmoins les faire entrer dans des calculs trop amples. Il s'agit de trouver la suite infinie qui exprime la Racine quarrée de $rr - xx$. On suppose $z = \overline{rr - xx}^{\frac{1}{2}}$ ou $zz + xx - rr = 0$. Donc supposant $z = a + bx^2 + cx^4 + dx^6 + ex^8$. &c. on aura $zz = aa + 2abx^2 + bbx^4 + 2adx^6$ &c.
$+ 2acx^4 + 2bcx^6$.

Substituant cette valeur on aura

$$\begin{aligned} zz &= aa + 2abx^2 + bbx^4 + 2adx^6. \\ &\quad + 2acx^4 + 2bcx^6 \text{ \&c.} \\ + xx &= \quad + x^2. \\ - rr &= - rr. \end{aligned}$$

Chaque terme égal 0. donnera $aa = rr$. ou $a = r$
$2ab = -1$. ou $b = -\frac{1}{2r}$ // $c = \frac{-1}{2,4r^3}$ // $d = \frac{-1}{16r^5}$

Ces valeurs substitutées à la place des indeterminées donneront $z = r - \frac{1}{2r}x^2 - \frac{1}{8r^3}x^4 - \frac{1}{16r^5}x^6$ &c.

CHAPITRE III.

Des lignes droites ou courbes qui servent à la construction des Equations.

I. LA construction des Equations simples, & de celles du second degré se fait par les principes de la Geometrie elementaire, c'est à dire, par les moyen de la ligne droite & du cercle : dont voicy des Exemples, où nous joindrons les analogies, dans lequelles elles se resolvent ; ce qui fournira en même tems le moyen de les construire.

1. Soit $x = \frac{ab}{c}$ ce qui donnera $c : a = b : x$. Fig. 2.

2. $x = \frac{abc}{de}$ ce qui donnera 1.° $d : a = b : \frac{ab}{d}$ soit à Fig. 3.
cette heure $\frac{ab}{d} = g$ on aura $x = \frac{gc}{e}$ ce qui donnera
2.° $e : g = c : x$.

3. $x = \frac{aa - bb}{c}$ ce qui donnera $c : a + b = a - b \; x$. Fig. 4.

4. $x = \frac{a^2b - bcc}{ad}$ supposant 1.° $p = \frac{ab}{d} = \frac{a^2b}{ad}$ & 2.° h Fig. 5.
$= \frac{bc}{d}$ on aura $hc = \frac{bc^2}{d}$ & $\frac{hc}{a} = \frac{bc^2}{ad} = i$. Donc $x = p - i$

5. $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{be}$. Soit $g = \frac{ab}{c}$ & $s = \frac{adc}{be}$ on aura x Fig. 6.
$= g + s$.

6. $x = \frac{a^2b + bcd}{af + cg}$. On supposera $\frac{cg}{a} = q$ & $f + q = h$. Fig. 7.
donc $af + cg = ah$. Le reste se fait comme dans le quatriéme Exemple.

Fig. 8. 7. $x = \frac{a^2 b - - b a d}{a f + b c}$ soit $\frac{a f}{b} = g$ & $g + c = h$. Donc $a f + b c = b h$. Donc $x = \frac{a^2 b - - b a d}{b h} = \frac{a^2 - a d}{h}$ par consequent $h : a = a - d : x$.

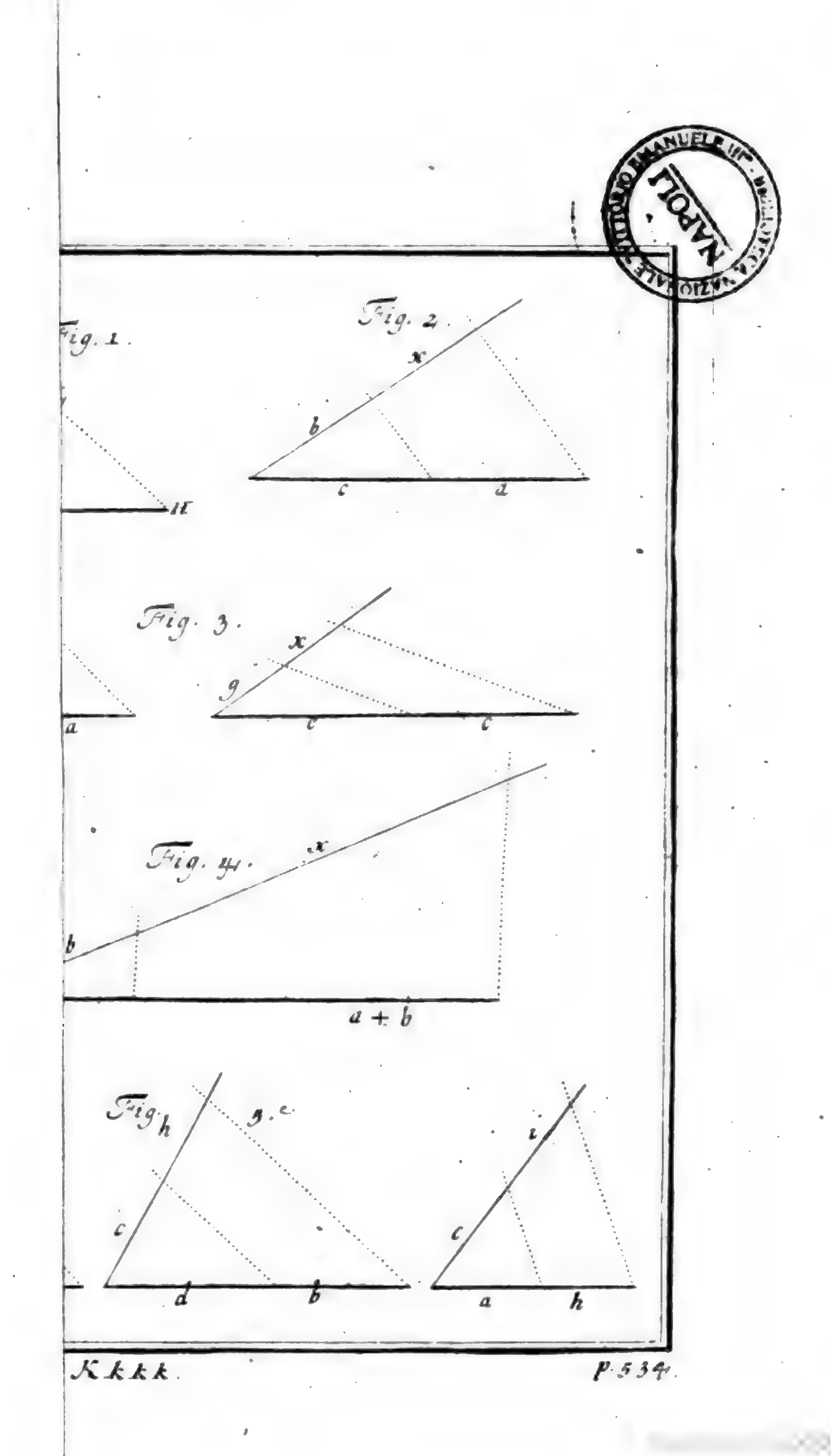
Fig. 9. 8. Soit $x = \overline{a^2 - b^2} : c$. C'est le troisiéme Exemple, qui se peut construire par le moyen du triangle rectangle dont a est l'hypotenuse, b l'un des côtés, l'autre côté sera $\sqrt{a^2 - b^2} = m$. Donc $c : m = m : x$

Fig. 10. 9. $x = \overline{a^2 + b^2} : c$. La construction se fait encore par le moyen d'un triangle rectangle dont un côté est a. l'autre b. ainsi l'hypotenuse sera $\sqrt{a^2 + b^2} = m$. Donc $c : m = m : x$.

Fig. 11. 10. $x = \frac{a^2 b + b c d}{a f + b c}$ soit $b : a = f : \frac{f a}{b}$ soit ensuite $\frac{f a}{b} + c = h$. Donc $a f + b c = b h$. soit $\sqrt{c d} = g$. Donc $x = \frac{a^2 b + b g^2}{b h} = \frac{a^2 + g^2}{h}$ & par le moyen d'un triangle rectangle $a^2 + g^2 = m^2$ par consequent $x = \frac{m^2}{h}$ Donc $h.\ m = m : x$.

Fig. 12. 11. $x = \sqrt{\frac{a b c}{d}}$ on aura $x^2 = \frac{a b c}{d}$. Soit $\frac{a b}{d} = r$. Donc $x^2 = c r$. Donc $x = \sqrt{c r}$.

La facilité que l'on trouve à décrire la Ligne Droite & la ligne Circulaire est cause que les Problêmes que l'on peut construire par leur moyen sont appellés Plans ; au lieu que ceux, dans la construction desquels il doit entrer quelqu'une des Sections Coniques, ont été appellé



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

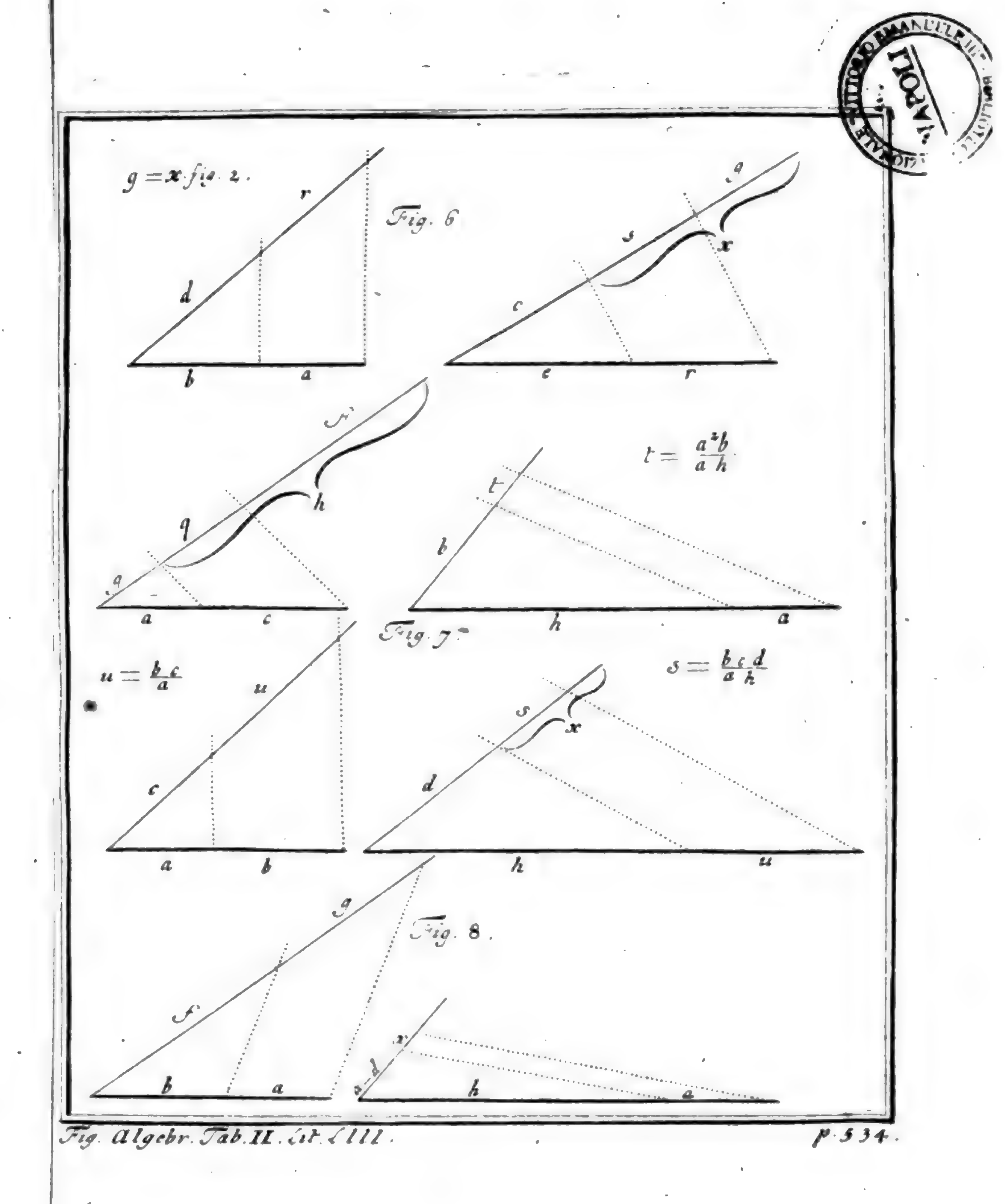
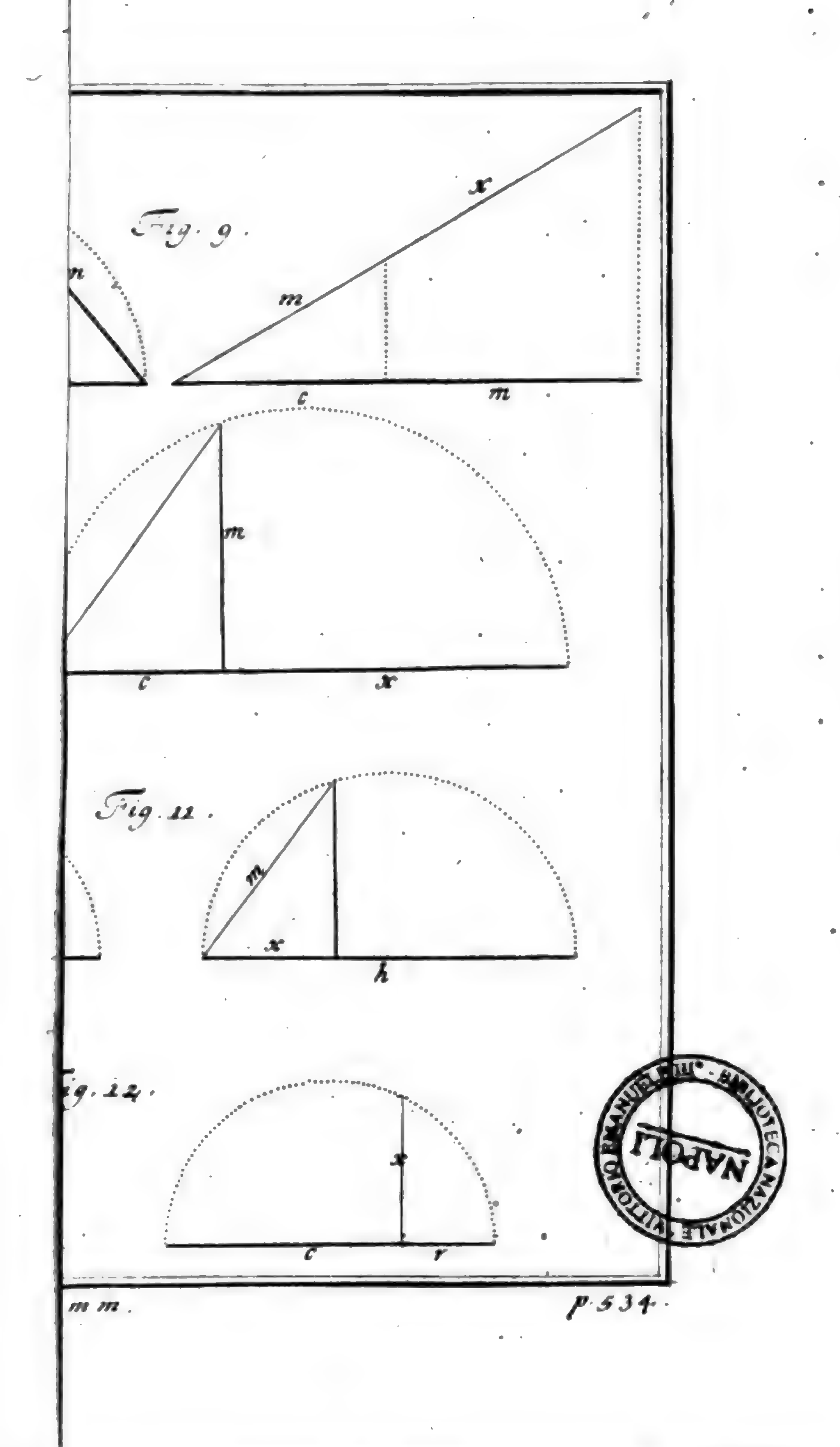


Fig. Algebr. Tab. II.



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

by Google

Solides; & que ceux qui demandent pour leur construction une Ligne encore plus composée, sont appellé Problêmes Lineaires.

2. Les Lignes Courbes, qui sont l'objet de la Geometrie composée, sont ou Geometriques ou Transcendentes. Les Geometriques, qui s'appellent aussi Algebriques, sont celles dont la nature ou la principale proprieté se peut exprimer par le rapport de quelques lignes droites & ainsi par une Equation Algebrique. Les Transcendentes, que l'on appelle aussi Mechaniques, sont celles dont la nature ne peut point etre exprimée par le rapport de quelques lignes droites. Pour connoitre ce rapport, dans lequel consiste la nature d'une Courbe, on y remarque le Diametre, le Sommet, les Ordonnées ou Appliquées, les Abscisses ou coupées, les Diametres ou Axes premiers, & les seconds ou Conjugués, & le Parametre. Le Diametre est une ligne qui coupe toutes les lignes paralleles tirées dans une Courbe en deux egalement, & s'il les coupe en même tems perpendiculairement, il est appellé l'Axe de la Courbe. Le Sommet est le point de la Courbe d'où part le diametre. Les lignes paralleles qui sont coupées en deux egalement par le Diametre s'appellent les Appliquées, & leurs moitiés sont les Demy-ordonnées. L'Abscisse est la partie du diametre, comprise entre le sommet & chaque ordonnée. Le diametre second ou conjugué est celui qui coupe les lignes paralleles au premier diametre en deux egalement. Le Parametre est un ligne constante, qui entre dans l'expression de l'équation de la Courbe, & qui est toujours une troisiéme proportionnelle soit à l'abscisse & à la demi-ordonnée ou au premier & au second diametre. On peut encore remarquer dans les Courbes leur Tangente & Soutangente, de même

que la Perpendiculaire à la Tangente & sa Souperpendiculaire. Parmi ces lignes il y en a qui sont constantes pendant que les autres sont changeantes ou variables; on marque celles-cy par les dernieres lettres de l'alphabet, au lieu que les autres se marquent par les premieres, ou par les lettres initiales de leurs noms, ce qui aide à soulager la memoire.

3. On exprime la nature de chaque Courbe par une Equation qui marque le rapport de chaque abscisse ou quelqu'une de ses puissances à sa demi-ordonnée, ou quelqu'une de ses puissances. Mais si dans une telle Equation l'abscisse & la demi-ordonnée ne se trouvent chacune que dans sa premiere puissance & sans être multipliée l'une par l'autre il est evident que la construction du problême se fera uniquement par le moyen d'une ligne droite sans qu'il entre aucune courbe. Ainsi pour qu'une Equation marque une ligne Courbe, il faut que l'abscisse ou la demi-ordonnée s'y trouve au second degré, ou que du moins l'une s'y trouve multipliée par l'autre; & alors la Courbe est appellée du premier genre. Si l'une ou l'autre y est du troisiéme degré, ou l'une multiplié par le quarré de l'autre, la Courbe sera du second genre, & ainsi de-suite jusqu'à l'infini.

4. Les Sections Coniques, qui sont outre le Cercle, la Parabole, l'Ellipse & l'Hyperbole, sont les Courbes du premier genre. Il est aisé de connoitre leur naissance par ce que nous en avons dit dans la Geometrie; où nous avons encore trouvé l'équation de la Parabole, le Parametre de son Axe, sa Tangente & son Foyer; ainsi nous donnerons icy de même la nature de l'Ellipse, & celle
Fig. 13. de l'Hyperbole. Soit dans le Cone ABC. la section DFE. une Ellipse dont le grand axe DE $= d$. l'abscisse DF $= x$.

la

la demi-ordonnée FM $= y$. HE $= f$. DG $= g$. KF $= r$. FL $= s$. Les trois lignes DG, HE. & KL. sont paralleles à la base BC, & les deux premieres passent par les extrémités de l'Ellipse, & sont constantes, au lieu que KL passe par le point F de l'Abscisse DF, ensorte qu'on aura toujours KFL $= \overline{FM}^2$ c'est à dire $rs = y^2$. Ainsi les deux triangles semblabes DEH. DFK. de même que les deux autres EDG. EFL. nous donneront :

$$d : f = x : r.$$

& $$d : g = d - x : s$$

$$\overline{}$$

$$d^2 : fg = dx - x^2 : y^2.$$

D'où on voit qu'en cherchant à d. & $\sqrt{fg}$ une troisiéme proportionelle, qui soit p. on aura :

$$d : p = dx - x^2 : y^2$$

$$\overline{}$$

$$px - \frac{px^2}{d} = y^2.$$

Or cette troisiéme proportionelle étant telle que $d : f = g : p$. on la détermine aisément en faisant DI $=$ DG, & tirant par le point I. la ligne IN. parallele à AB, ce qui donnera HN $= p$. ou au parametre de l'Ellipse proposée.

Quant à l'Hyperbole, soit son axe DI, prolongé jusqu'à l'occurrence du côté BA en E. prenant DI $=$ DE & nommant DE ou DI $= d$. DG $= g$. KF $= r$. FL $= s$. DF $= x$. FM $= y$. IC $= b$. IN $= u$. les deux triangles semblables EDG. EFK. de même que les deux autres DIC. DFL. donneront : *Fig.* 14.

$$d : g = d + x : r$$
$$d : b = x : s.$$

$$d^2 : gb = dx + x^2 : y^2 . \ rs \text{ étant } = y^2.$$

Ainſi prenant à d. & $\sqrt{gb} = n$, une troiſiéme proportionelle p. on aura :

$$d : p = dx + x^2 : y^2$$

& par conſeq. $px + \frac{px^2}{d} = y^2$

V. On ſe ſert de differentes manieres pour tracer ces Courbes ſur un plan; dont les unes conſiſtent à trouver pluſieurs points de la Courbe très-proches les uns des autres, leſquels étant joints par de petites lignes donnent à peu près la Courbe que l'on veut décrire; d'autres conſiſtent dans un mouvement continu, qui fait décrire la Courbe d'un ſeul trait. Nous avons donné dans la Geometrie une de ces manieres pour décrire la Parabole, de même que l'Ellipſe; & comme elle paroit fort ſimple & fort facile à être miſe en uſage, il ſera bon d'en donner icy la demonſtration. Soit donc pour la Parabole la diſtance du foyer au Sommet AF $= d$. Il eſt d'abord évident que les deux lignes FB. BG priſes enſemble ſont toujours $= 2d$. du moins pendant que le point B ſe trouve au deſſus de la Ligne FC. il eſt de même evident qu'à cauſe du mouvement continu de la regle depuis le point A. vers la droite, la ligne FB. augmente continuellement, pendant que l'autre BG. va en diminuant; ſoit cette quantité variable $= r$, & nous aurons FB $= d + r$, BG $= d - r$.

Fig. 15.

Digitized by Google

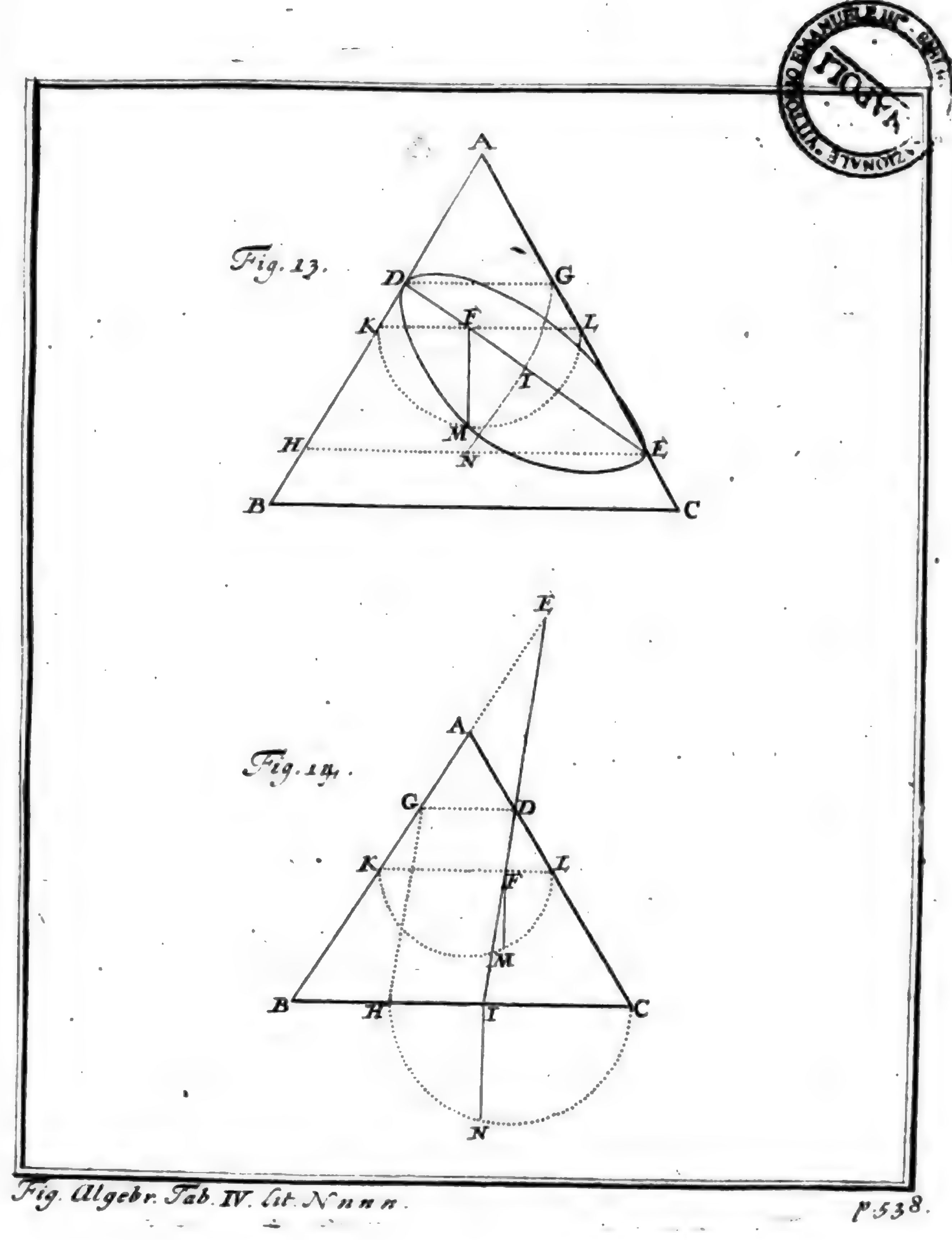


Fig. Algebr. Tab. IV. lit. Nnnn.

Digitized by Google

par conſequent

$\overline{FB}^2 = d^2 + 2dr + r^2$.

$\overline{BG}^2 = d^2 - 2dr + r^2$

$\quad - \quad + \quad -$

$\overline{FG}^2$ ou $\overline{BH}^2 = 4dr$

Et à cauſe de BG $=$ HF $=$ $d - r$. Nous aurons AH $= r$.

Ainſi AH $= r$. & HB $= \sqrt{4dr}$

Mais le point B étant parvenu en C. on aura BG $= o$. & FC $= 2d$. Enfin le point B étant parvenu en D on aura AE $= r$. FE $= r - d$. Donc on aura encore $\overline{ED}^2 =$ $4dr$. & ainſi AE $= r$. & ED $= \sqrt{4dr}$.

Par conſequent l'expreſſion de la demi-ordonnée par ſon Abſciſſe & une grandeur conſtante y eſt par-tout la même, & ſubſtituant x. à la place de r. & px ou yy à la place de $4dr$, on aura l'Equation ordinaire de la Parabole. On y trouve auſſi FC $=$ 2 AF.

Dans la Deſcription de l'Ellipſe qui ſe fait par le moyen d'un triangle filaire, dont la Baſe eſt la diſtance des deux foyers AB, & la ſomme des deux autres côtés égale à l'Axe DE, on trouve le rapport qui eſt entre le rectangle des ſegmens de l'axe & le quarré de la demi-ordonnée de la maniere ſuivante. Soit AB $= c$. DE $= d$ la difference des côtes du triangle ABC, en quelque ſituation que ce ſoit $= 2r$. Il eſt d'abord évident qu'au cas du triangle iſoſcelle $2r = o$, & qu'alors le rectangle des ſegmens de l'axe eſt au quarré de la demi-ordonnée, comme $\frac{1}{4}d^2$: $\frac{1}{4}d^2 - \frac{1}{4}c^2$, ou comme $d^2 : d^2 - c^2$. Donc le ſecond axe ou l'axe conjugué eſt $\sqrt{d^2 - c^2}$. Il eſt encore évident que Fig. 16.

dans toute ſituation poſſible du triangle $2r < c$. & que $2r = c$. ſeulement lorſque le ſommet de triangle tombe en D ou en E, & dans ce cas le rectangle & le quarré deviennent $= 0$. Donc r eſt une grandeur variable, qui va en augmentant depuis l'extremité du petit axe juſquà celle du grand. Or le triangle décrivant devenant ſcalene, enſorte que par ex. $BC = \frac{1}{2}d + r$. on aura $AC = \frac{1}{2}d\ r$ il ſera à l'exception d'un ſeul cas ou oxygone ou amblygone ; dans le cas du triangle oxygone nous aurons par la 13. II.

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \tfrac{1}{4}d^2 - dr + r^2 + c^2$$
$$\overline{BC}^2 = \tfrac{1}{4}d^2 + dr + r^2$$
$$- \quad - \quad -$$

$$AG = \frac{-2dr + c^2}{2c} = \tfrac{1}{2}c - \frac{dr}{c}$$

$$\overline{AG}^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - dr + \frac{d^2r^2}{c^2}$$

$$\overline{AC}^2 = \tfrac{1}{4}d^2 - dr + r^2$$
$$\overline{AG}^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - dr + \frac{d^2r^2}{c^2}$$
$$- \quad + \quad -$$

$$\overline{CG}^2 = \tfrac{1}{4}d^2 - \tfrac{1}{4}c^2 + r^2 - \frac{d^2r^2}{c^2}$$

$$\frac{d^2c^2 - c^4 + 4r^2c^2 - 4d^2r^2}{4c^2}$$

De plus

$$DF \quad FA \quad \overline{\quad AG \quad}$$

$$\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c - \frac{dr}{c}$$

$$DG = \frac{1}{2}d - \frac{dr}{c}$$

$$GE = \frac{1}{2}d + \frac{dr}{c}$$

$$DGE = \frac{1}{4}d^2 - \frac{d^2r^2}{c^2}$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; 4c^2$$

$$d^2c^2 - 4d^2r^2$$

Donc DGE: $\overline{CG}^2 = d^2c^2 - 4d^2r^2 : d^2c^2 - 4d^2r^2 + 4r^2c^2 - c^4$

Dans le cas du triangle amblygone les mêmes choses supposées nous aurons par 12. II.

$$\overline{BC}^2 = \frac{1}{4}d^2 + dr + r^2$$

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \frac{1}{4}d^2 - dr + r^2 + c^2$$

$$\qquad - \quad + \quad - \quad -$$

$$AG = \frac{2dr - c^2}{2c} = \frac{dr}{c} - \frac{1}{2}c.$$

$$AG = \frac{d^2r^2}{c^2} - dr + \frac{1}{4}c^2$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; 4c^2$$

Lequel étant fouftrait de $\overline{AC}^2$, il refte $\overline{CG}^2 = d^2 c^2 - c^2 + 4 r^2 c^2 - 4 d^2 r$ comme cy-deffus.

De plus

$$\frac{DF \quad FA \qquad AG}{\frac{1}{2} d - \frac{1}{2} c - \frac{dr}{c} + \frac{1}{2} c}$$

$DG = \frac{1}{2} d - \frac{dr}{c}$ Donc le refte étant fait comme cy-deffus on aura encore dans le prefent cas.

$$DGE : \overline{CG}^2 = d^2 c^2 - 4 d^2 r^2 : d^2 c^2 - 4 d^2 r^2 + 4 r^2 c^2 - c^4$$

Donc $d^2 \times \overline{c^2 - 4 r^2} : d^2 \times \overline{c^2 - 4 r^2} + c^2 \times \overline{4 r^2 - c^2}$

ou $d^2 \times \overline{c^2 - 4 r^2} : d^2 \times \overline{c^2 - 4 r^2} - c^2 \times \overline{c^2 - 4 r^2}$

ou $d^2 \times \overline{c^2 - 4 r^2} : \overline{d^2 - c^2} \times \overline{c^2 - 4 r^2}$

ou enfin $d^2 : d^2 - c^2$

Or fuppofant $\sqrt{d^2 - c^2} = \delta$, fi on cherche à d & δ une troifiéme proportionnelle $p = d - \frac{c^2}{d}$. qui foit le parametre ; on aura à caufe des trois lignes proportionnelles $d, \delta. p. d^2 : d^2 - c^2 = d : p$; donc nommant l'Abfciffe x. la demi-ordonnée y, on aura :

$$d\,x - x^2 : y^2 = d : p.$$

$$d\,y\,y = d\,p\,x - p\,x\,x$$

$y\,y = p\,x - p\,x^2 : d.$ Ce qui eſt l'Equation ordinaire de l'Ellipſe.

On peut remarquer qu'au cas que le triangle décrivant devienne rectangle, on aura $\overline{\tfrac{1}{2}d + r}^2 - \overline{\tfrac{1}{2}dr}^2 = 2\,d\,r = c^2$. Ainſi dans ce cas $r = \frac{c^2}{2d}$. Ainſi la demi-ordonnée $\tfrac{1}{2}d - r = \tfrac{1}{2}d - \frac{c^2}{2d}$. C'eſt-à-dire, l'ordonnée $= p$.

L'Hyperbole qui a toujours une oppoſée, & égale à l'autre extrémité de ſon axe, laquelle va de l'autre côté, ſe peut encore décrire d'un mouvement continu de la maniere qui ſuit. Soient deux chevilles fixées aux foyers F & f des deux Hyperboles; appliquez à celle de l'Hyperbole oppoſée une régle fD, par ſon extrémité f faites enſorte qu'elle y puiſſe tourner facilement; à l'autre extrémité D de cette regle ſoit attachée une Corde DCF, dont le bout F ſoit attaché ou noüé à la cheville F, enſorte que la régle étant appliquée à la ligne fB, le retour de cette corde ſe rencontre préciſement en A, qui eſt le ſommet de l'Hyperbole à décrire; là où mettant un ſtile, qui deſcende toujours le long de la régle, à meſure que l'extrémité D s'éloigne de la ligne fB, & que la corde ſe déploye, ce ſtile décrira la Fig. 17.

Courbe A c C, qu'il s'agit de démontrer être une Hyperbole.

Il eſt d'abord évident que dans cette deſcription les deux côtés fC, FC du triangle Ffc prennent toujours des accroiſſemens égaux, le côté FC augmentant d'une partie de la corde, qui ſe déploye d'une partie égale de la régle qui fait l'accroiſſement de l'autre côté fc; de ſorte que ces deux côtés gardent toujours la même difference entr'eux. Soit cet accroiſſement $= n$, Aa, qui eſt l'axe ou la diſtance des ſommets $= d$, AF ou af diſtance du foyer au ſommet $= a$. Ab ou AB $= x$, bc ou BC $= y$, on aura fc ou fC $= a + d + n$. fB ou $fb = a + d + x$ Fc ou FC $= a + n$ Or bc^2 ou $\overline{BC}^2 = \overline{fc}^2 - \overline{fb}^2$ ou $\overline{fC}^2 - \overline{fB}^2$. C'eſt-à-dire, $y^2 = 2an + 2dn + n^2 - 2ax - 2dx - x^2$.

$$\text{Mais } \overline{bc}^2 = \overline{Fc}^2 - \overline{Fb}^2 \quad \text{ou} \quad \overline{BC}^2 = \overline{FC}^2 - \overline{FB}^2$$
$$y^2 = \overline{a+n}^2 - \overline{a-x}^2 \qquad\qquad y^2 = \overline{a+n}^2 - \overline{x-a}^2$$

Par conſéquent dans l'un & dans l'autre cas on aura:

$$2an + 2dn + n^2 - 2ax - 2dx - x^2 = 2an + n^2 + 2ax - x^2$$

$$\text{Donc } 2dn = 4ax + 2dx$$
$$dn = 2ax + dx$$
$$n = \frac{2ax}{d} + x$$

Cette valeur étant ſubſtituée dans l'une ou l'autre valeur de y^2, elle nous donnera : $y^2 =$

$$y^2 = \frac{4a^2x^2}{d^2} + \frac{4a^2x}{d} + \frac{4ax^2}{d} + 4ax$$

$$\overline{} d^2$$

$$d^2y^2 = 4a^2x^2 + 4a^2dx + 4adx^2 + 4ad^2x$$

$$4a^2 : d^2 = y^2 : x^2 + dx + \frac{dx^2 + d^2x}{a}$$

Et divisant le second & quatriéme terme par $1 + \frac{d}{a}$

$$4a^2 : \frac{d^2}{1 + \frac{d}{a}} = y^2 : x^2 + dx$$

Et multipliant le premier & le second par $1 + \frac{d}{a}$

$$4a^2 + 4ad : d^2 = y^2 : x^2 + dx$$

Mais divisant $4a^2 + 4ad$ par d, on aura $\frac{4a^2}{d} + 4a$. Donc les trois grandeurs $\frac{4a^2}{d} + 4a$, $\sqrt{\overline{a+d} \times 4a}$, d sont proportionelles; par conséquent $\frac{4a^2}{d} + 4a : d = y^2 : x^2 + dx$, qui est l'équation de l'Hyperbole.

On y voit en même tems que l'axe conjugué est $\sqrt{\overline{a+d} \times 4a}$ & le parametre $\frac{4a^2}{d} + 4a$, lorsque le premier axe est d, & la distance du foyer au sommet $= a$.

On peut encore remarquer qu'au cas de $a = x$, c'est

à-dire, lorsque le triangle fFC devient rectangle $\overline{Fc}^2 - \overline{fF}^2 = \overline{Fc}^2$. C'est-à-dire, $\overline{a+b+n}^2 - \overline{2a+d}^2$ donne $FC = \frac{2a^2}{d} + 2a = \frac{1}{2}p$. Ainsi nous avons déduit en même tems de cette maniere de décrire les Sections Coniques, que dans l'une & dans l'autre l'ordonnée, qui passe par le foyer, est égale au Parametre.

VI. Les Analogies, qui donnent les équations des Sections Coniques, peuvent avoir quelques-uns de leurs termes élevés à quelque puissance. Ainsi on peut concevoir une espece de Cercle dans lequel

Fig. 18.

$$\overline{AC}^2 : \overline{DC}^2 = DC : CB$$

$$x^2 : y^2 = y : d-x \text{ ce qui}$$

donne $y^3 = dx^2 - x^3$, & alors cette équation est celle d'un Cercle plus élevé; & si on exprime ces puissances d'une maniere indéterminée, comme

$$x^m : y^m = y^n : \overline{d-x}^n.$$

On aura

$$y^{m+n} = \overline{d-x}^n \times x^m$$

qui sera une formule génerale pour des genres infinis de Cercles. De même dans la Parabole ordinaire y ayant $a : y = y : x$. Si on éleve les deux premiers termes au quarré, au cube, &c. on aura pour la Parabole Cubique $a^2x = y^3$ pour la Parabole Sursolide $a^3x = y^4$, &c. au lieu que $ax^2 = y^3$, &c. donnent des Courbes que

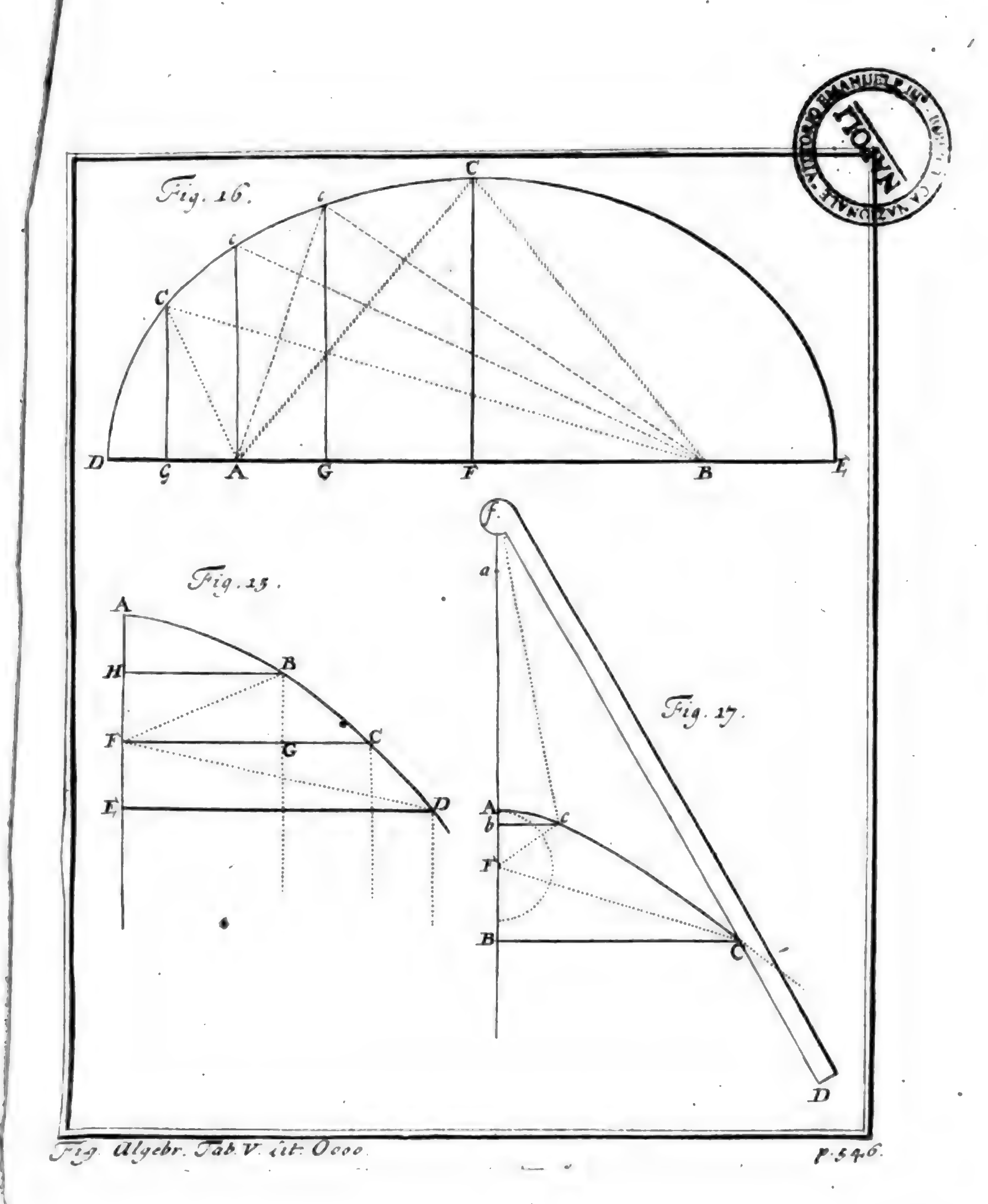
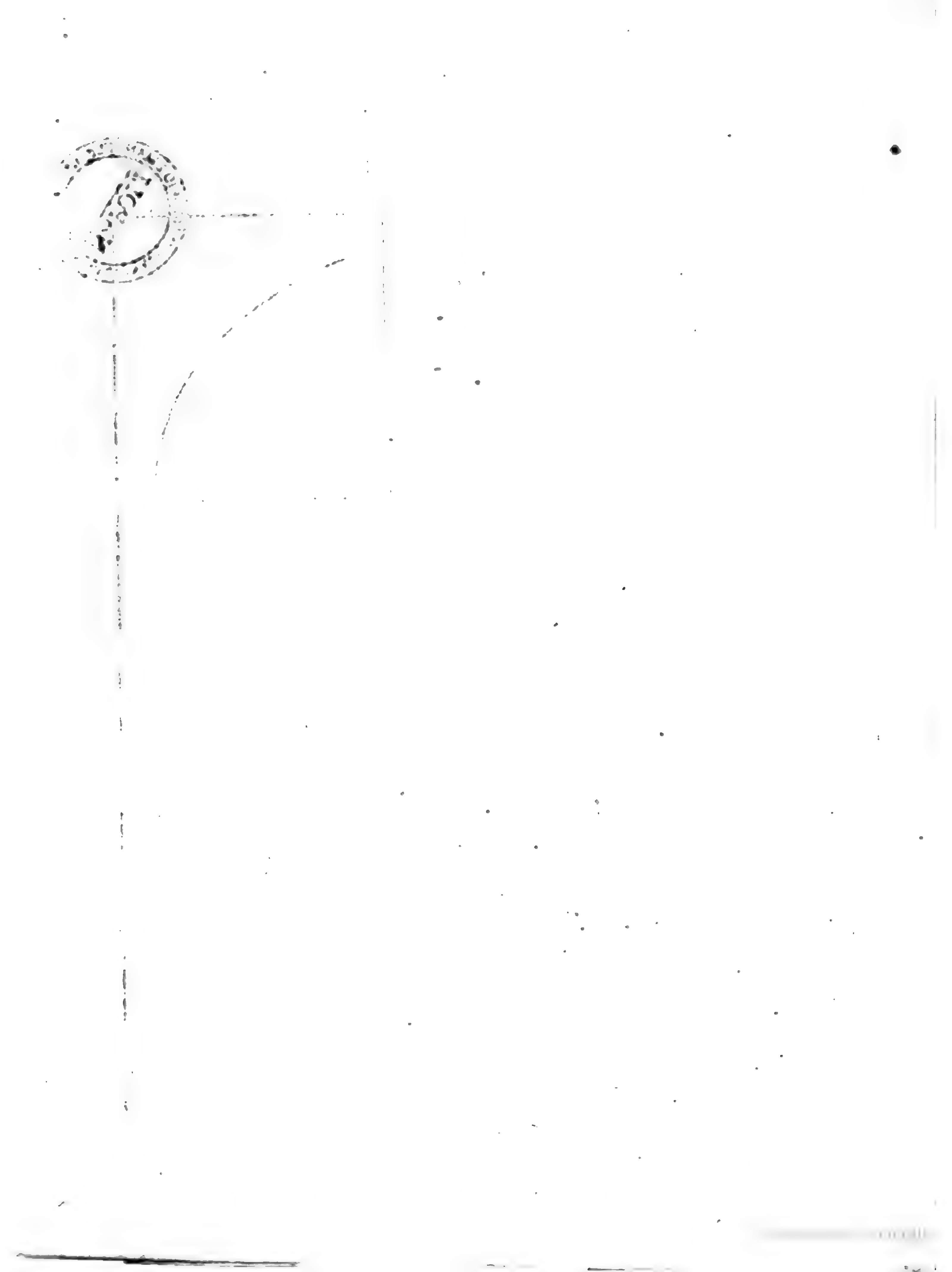


Fig. Algebr. Tab. V. lit. Oooo



l'on appelle des Demi-Paraboles; & on aura pour tout ce que l'on voudra de genres de paraboles la formule génerale $a^m x^n = y^r$, on peut de même concevoir une Ellipse Cubique $dy^3 = px^2 \times \overline{d - x}$ une sur Solide $dy^4 = px^2 \times \overline{d - x}^2$ & generalement $dy^{m+n} = px^m \times \overline{d - x}^n$, ainsi l'équation génerale des Hyperboles à l'infini se trouve être $dy^{m+n} = px^m \times \overline{d + x}^n$.

VII. Lorsque une Courbe géometrique est décrite avec son axe, on se sert de la méthode qui suit, pour mener ses Tangentes.

On conçoit une Sécante SCc, qui coupe la Courbe en deux points, comme C, c, que l'on peut concevoir aussi proche l'un de l'autre que l'on voudra, l'autre extremité S de cette sécante rencontrant l'axe en S; & tirant la ligne Ce parallele à l'axe, on aura les deux triangles semblables SBC, Sbc. Soit donc la Soutangente $SB = s$ l'accroissement de l'abscisse $Bb = e$, ce qui donnera $s : y = s + e : y + \frac{ey}{s} = bc$, après quoi mettant dans l'équation à la Courbe $Ab = x + e$, à la place de $AB = x$, & $bc = y + \frac{ey}{s}$ à la place de $BC = y$, on aura une nouvelle équation, que l'on pourra ordonner, ensorte que les membres du premier terme soient l'équation de la Courbe, que ceux du second terme ne contiennent que e lineaire, ceux du troisiéme ee, &c. Fig. 19.

Où il est évident que le premier terme $= 0$, puisqu'il est l'équation de la Courbe; donc le reste est aussi égal 0. Par conséquent divisant ce reste par la valeur de e, qui est dans le second terme, ce terme restera sans e. Mais supposant à présent la distance des deux ordonnées

Digitized by Google

$Bb = o$, tout les autres termes s'évanoüiſſent, & on pourra trouver la valeur de s, par ce qui reſte du ſecond terme, après y avoir ſubſtitué à la place de y ſa valeur en x priſe dans l'équation de la Courbe. En voici les applications :

I.° A la Parabole où l'on aura,

$$\left.\begin{array}{l} yy + \frac{2ey^2}{s} + \frac{e^2y^2}{s^2} \\ -px - ep \end{array}\right\} = o$$

Donc $\frac{2y^2}{s} = p$, ou $\frac{2px}{s} = p$

Ou $2x = s$; Par conſéquent la Soutangente eſt double de l'Abſciſſe.

II.° Dans l'Ellipſe l'équation étant,

$$y^2 - px + \frac{px^2}{d} = o$$

On aura

$$\begin{array}{l} y^2 + \frac{2ey^2}{s} + \frac{e^2y^2}{s^2} \\ - px - ep \\ + \frac{px^2}{d} + \frac{2epx}{d} + \frac{ep^2}{d} \end{array}$$

Or $\frac{2ey^2}{s} = \frac{2epx}{s} + \frac{2epx^2}{ds}$

La valeur du ſecond terme ſera

$$\frac{\frac{2epx}{s} \quad - \frac{2epx^2}{ds} - ep + \frac{2epx}{d}}{ep.}$$

$$\frac{2x}{s} - \frac{2x^2}{ds} - 1 + \frac{2x}{d}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; ds$$

$$2dx - 2x^2 - ds + 2xs$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$2dx - 2x^2 = ds - 2xs$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$d - 2x : 2x = d - x : s$$

$$2\overline{\qquad\qquad}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\tfrac{1}{2}d - x : x = d - x : s$$

C'eſt à dire dans l'Ellipſe le rectangle des Segmens de l'Axe eſt égal au rectangle compris ſous la diſtance de la demi-ordonnée au Centre, & la Soutangente.

III.° Dans l'Hyperbole l'Equation étant

$$y^2 - px - \frac{px^2}{d} = 0$$

Puiſqu'il n'y a qu'un changement de ſigne, l'operation eſt la même qu'à l'Ellipſe ; & l'on trouvera pour derniere

Equation $\frac{1}{2}d + x : x = d + x : s$. Et parce qu'à cause des triangles rectangles semblables la Soutangente est à la demy-ordonnée, comme la demi-ordonnée est à la Souperpendiculaire, on trouve aisement, que dans la Parabole la Souperpendiculaire est $= \frac{1}{2}p$. dans l'Ellipse elle est $\frac{1}{2}p. - \frac{px}{d}$ d'où on tire $d : p = d - x :$ à la Souperpendiculaire, & dans l'Hyperbole $\frac{1}{2}p + \frac{px}{d}$; ce qui donne $d : p = \frac{1}{2}d + x :$ à la Souperpendiculaire.

Fig. 20. VIII. Soit la Ligne TM. tangente de la Parabole au point M, & qu'on lui tire une parallele NFHO, qui soit coupée au point F par la ligne MFG, parallele à l'Axe AQ, la partie NH, qui est dans la Parabole, sera coupée en deux également au point F. Nommant pour cet effet $AP = TA = x$. $PM = IF = \sqrt{ax}$. $OT = PI = u$. $IQ = t$. $LI = r$. on aura par la nature de la Parabole $\overline{QN}^2 = ax + au + at$. & à cause de $\Delta\Delta \backsim$. OIF. OQN

$$OI : IF = OQ : QN.$$

$$\text{ou } \overline{OI}^2 : \overline{IF}^2 = \overline{OQ}^2 : \overline{QN}^2.$$

$$4x^2 : ax = \overline{2x+t}^2 :$$

$$4x : a = \overline{2x+t}^2 : \frac{a \times \overline{2x+t}^2}{4x}$$

Donc $ax + at + \frac{at^2}{4x} = ax + au + at$

$$t^2 = 4xu.$$

De même

$OI : IF = OL : LH$

$\overline{OI}^2 : \overline{IF}^2 = \overline{OL}^2 : \overline{LH}^2$

$4x^2 : ax = \overline{2x - r}^2 :$

$4x : a = \overline{2x - r}^2 : \frac{a \times \overline{2x - r}^2}{4x}$

Mais $LH^2 = ax + au - ar$

Donc $ax - ar + \frac{ar^2}{4x} = ax + au - ar$

$$r^2 = 4xu$$

par conséquent $r = t$. & $NF = FH$.

Or la même chose arrivant à chaque parallele de la Tangente TM que l'on voudra tirer, il est évident que le point M. étant pris pour le sommet, MG sera le Diametre, MF une Abscisse, FH une demi-ordonnée, & leur troisiéme proportionnelle, le parametre de ce diametre, qui sera quadruple de la ligne tirée du point M, au foyer de la Parabole. Si dans l'Ellipse on tire la ligne NH. parallele à la Tangente TM. La ligne MC, tirée du point d'attouchement M, au centre C, la partagera en deux également au point G. Soit pour cet effet $PM = b$. $PC = c$. $AB = a$. $AP = d$. FG ou $KD = t$. GI ou $KS = z$. on aura $HL = t - z$, & par conséquent $\overline{HL}^2 = t^2 - 2tz + z^2$. Mais on trouvera une autre expression de $\overline{HL}^2$ en disant que *Fig.* 21.

$PM : PC = FG : FC$ Et à cause des Triangles semblables

$b : c = t : \frac{tc}{b}$ TMP, GIH.

$PM : PT = GI : IH.$

$$b : \frac{ad - d^2}{c} = z : \frac{\overline{ad - d^2} \times z}{cb}$$

Pour abreger on pourra supposer $ad - d^2 = u$. ainsi on aura HI, ou $FL = uz : cb$, & par conséquent

$$CL = CF + FL = \frac{tc}{b} + \frac{uz}{cb} = \overline{tc^2 + uz} : cb,$$

Donc $AL = AC - CL = \frac{1}{2}a - \overline{tc^2 - uz} : cb$, &

$BL = BC + CL = \frac{1}{2}a + \overline{tc^2 + uz} : cb$, ou $\frac{\frac{1}{2}acb + tc^2 + uz}{cb}$ & puisque

$AP, PB : AL, BL = PM^2 : HL^2$: on aura

$$u : \frac{\frac{1}{4}a^2c^2b^2 - t^2c^4 - 2tc^2uz - u^2z^2}{c^2b^2} = b^2 : HL^2. \text{ qui sera}$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2b^2 - t^2c^4 - 2tc^2uz - u^2z^2}{c^2u} = t^2 - 2tz + z^2$$

D'où faisant evanoüir la fraction, & ôtant ce qu'il y a d'égal, on aura:

$\frac{1}{4} a^2 c^2 b^2 - t^2 c^4 - u^2 z^2 = t^2 c^2 u + z^2 c^2 u$ & transposant

$\frac{1}{4} a^2 c^2 b^2 - t^2 c^4 - t^2 c^2 u = u^2 z^2 + z^2 c^2 u$ & divisant

par $u^2 + c^2 u \quad \frac{\frac{1}{4} a^2 c^2 b^2 - t^2 c^4 - t^2 c^2 u}{u^2 + c^2 u} = z^2.$

Soit à present KN $= r$, le reste étant comme cy-dessus, on trouvera DC $= \overline{t c^2 - u r} : c b$, & AD $= \frac{1}{2} a - \frac{t c^2 + u r}{c b}$. DB $= \frac{1}{2} a + \frac{t c^2 - u r}{c b}$. Donc aprés l'operation faite $r^2 = \frac{\frac{1}{4} a^2 c^2 b^2 - t^2 c^4 - t^2 c^2 u}{u^2 + c^2 u}$ par consequent $r = z$, & à cause des triangles semblabes, GN = HG. Donc le point M étant pris pour le sommet, MC prolongée sera le Diametre, MG l'Abscisse, & HN, l'Ordonnée.

Il est visible qu'en tirant par le centre C, une ligne QC &c. parallele à cette Ordonnée, ou à la Tangente MT. elle sera le diametre conjugué au premier MC, &c. & pour determiner sa valeur par le calcul soit dans l Ellipse proposée AEB, l'axe AB $= a$, son conjugué 2CE $= b$, & le point M, consideré comme donné. Par con-

ſequent pour une plus grande facilité du calcul l'abſciſſe priſe depuis le centre PC $= c$, on aura par la nature de l'Ellipſe

$$\overline{AB}^2 : 2\,\overline{CE}^2 :: AP, PB :$$

$$a^2 : b^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - c^2 : \tfrac{1}{4} b^2 - \frac{b^2 c^2}{a^2} = \overline{PM}^2 = i^2.$$

Donc $\tfrac{1}{2} d^2 = \tfrac{1}{4} b^2 - \frac{b^2 c^2}{a^2} + c^2 = \overline{MC}^2 = f^2$.

& pour trouver CQ qui eſt ſon diametre conjugué, nous aurons

$$\frac{a^4}{16 c^2} - \tfrac{1}{2} a^2 + c^2 + \tfrac{1}{4} b^2 - \frac{b^2 c^2}{a^2} = \overline{MT}^2 = g^2.$$

Après quoi on pourra dire qu'à cauſe des triangles ſemblables MPT, QRC, nommant CR $= s$.

$$PT : MT :: CR : CQ.$$

$$h : g = s : \frac{g s}{h}.$$

& par la nature de l'Ellipſe.

$$AR, RB : \overline{QR}^2$$

$$a^2 : b^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - s^2 : \tfrac{1}{4} b^2 - \frac{b^2 s^2}{a^2}$$

$$\overline{TM}^2 : \overline{MP}^2 :: \overline{CQ}^2 : \overline{QR}^2$$

De plus

$$g^2 : i^2 = \frac{g^2 s^2}{b^2} : \frac{1}{4} b^2 - \frac{b^2 s^2}{a^2}$$

Donc $\frac{i^2 s^2}{b^2} + \frac{b^2 s^2}{a^2} = \frac{b^2}{4c}$

& puiſque PT $= \frac{a^2}{4c} - c = h.$ en ſubſtituant les valeurs de i^2. & h^2. nous aurons

$$\frac{1}{4} a^2 b^2 s^2 - b^2 c^2 s^2 + \frac{a^4 b^2 s^2}{16 c^2} - \frac{1}{4} a^2 b^2 s^2 + b^2 c^2 s = \frac{\frac{a^6 b^2}{16 c^2} - \frac{1}{2} a^2 b^2 + a^2 b^2 c^2}{4}$$

$$\text{ou } \frac{a^4 b^2 s^2}{16 c^2} - \frac{1}{4} a^2 b^2 s^2 = \frac{\frac{a^6 b^2}{16 c^2} - \frac{1}{2} a 4 b^2 + a^2 b^2 c^2.}{4}$$

$$\text{Donc } s^2 \times \overline{\frac{a^4 b^2}{16 c^2} - \frac{1}{4} a^2 b^2} = \frac{\frac{a^6 b^2}{16 c^2} - \frac{1}{2} a^4 b^2 + a^2 b^2 c^2.}{4}$$

& la diviſion faite $s^2 = \frac{a^2 - 4c^2}{4} = \frac{1}{4} a^2 - c^2.$

AP. CR. PB.

par conſequent $\div \frac{1}{2} a - c : s : \frac{1}{2} a + c.$

Ainsi la valeur de s. se trouvant toute en grandeurs connuës, il est aisé de trouver celle de CQ. par où on connoîtra que $\overline{MC}^2 + \overline{CQ}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2$. ou que les quarrés des diametres conjugués pris ensemble sont egaux aux quarrés des axes conjugués : c'est-à-dire la valeur de $\overline{CQ}^2$, sera $\frac{1}{4}a^2 - c^2 + \frac{b^2c^2}{a^2}$. Présentement pour connoître si le rectangle des segmens du diametre MG, MCG, est de même au quarré de la demi-ordonnée GN, comme le quarré de MC. est au quarré de CQ. soit l'absciffe prise depuis le centre $CG = x$. $GN = y$. $PM = i$. que l'on considere comme connûë, le reste étant comme cy-dessus nous aurons :

MC : CP : GC : CF.

$f : c = x : \frac{cx}{f}$

MT : PT : : GN : GK ou FD.

$g : h = y : \frac{hy}{g}$

CP : PM : : CF : GF ou DK

$c : i = \frac{cx}{f} : \frac{ix}{f}$

MT : PM : GN : NK

$g : i = y : \frac{iy}{g}$

$DN = \frac{ix}{f} + \frac{iy}{g}$

$\overline{DN}^2 = \frac{i^2x^2}{f^2} + \frac{i^2xy}{fg} + \frac{i^2y^2}{g^2}$

& $AD = AC - CF + FD = \frac{1}{2}a - \frac{cx}{f} + \frac{hy}{g}$

par conſequent $BD = \frac{1}{2} a + \frac{cx}{f} - \frac{hy}{g}$

Donc AD , BB : DN :: AP,PB:PM[2]

$$\frac{1}{4} a^2 - \frac{c^2x^2}{f^2} + \frac{2chxy}{fg} - \frac{h^2y^2}{g^2} : \frac{i^2x^2}{f^2} + \frac{2i^2xy}{fg} + \frac{i^2y^2}{g^2} = \frac{1}{4} a^2 - c^2 : i^2$$

& pour faire le produit des moyens & des extremes, puiſque i^2 ſe trouve par tout dans le ſecond & quatriéme terme on pourra l'effacer de part & d'autre, ce qui donnera

$$\frac{1}{4} a^2 - \frac{c^2x^2}{f^2} + \frac{2chxy}{fg} - \frac{h^2y^2}{g^2} = \frac{a^2x^2}{4f^2} + \frac{a^2xy}{2fg} + \frac{a^2y^2}{4g^2} - \frac{c^2x^2}{f^2} - \frac{2c^2xy}{fg} - \frac{c^2y^2}{g^2}$$

& ſubſtituant les valeurs de h, & h^2. dans le premier membre aprés avoir effacé les grandeurs qui ſe trouvent les mêmes de part & d'autre, & tout diviſé par $\frac{1}{4} a^2$. il reſtera

$1 - \frac{x^2}{f^2} = \frac{a^2y^2}{4c^2g^2} - \frac{y^2}{g^2}$. ou ôtant les fractions

$$4c^2f^2g^2 - 4c^2g^2x^2 = a^2f^2y^2 - 4c^2f^2y^2$$

$f^2 - x^2 : y^2 = a^2 - 4c^2 \times f^2 : 4c^2g^2$. où ſubſtituant à la fin la valeur de g^2 on trouvera une grandeur qui ſe diviſe exactement par $a^2 - 4c^2$. Donc $f^2 - x^2 : y^2 = f^2 : \overline{QC}^2$.

Dans l'Hyperbole la ligne NO, parallele à la Tangente MT eſt encore coupée en deux également au point G, par la ligne CQ qui paſſe par le centre C. & le point d'attouchement M.

Pour le voir soit GI ou HS $= u$. GF ou HD$= z$. on aura IFDS, ou LO$= z - u$, & PM : PC$=$GI : CI.

$$y : b = u : \frac{ub}{y}$$

& à cause des $\Delta\Delta$ ∽. MPT, GFO. on aura

PM : PT $=$ GF : FO.

$$y : \frac{dx + x^2}{\frac{1}{2}dx + x} = z : \frac{\overline{dx + x^2} \times z}{\overline{\frac{1}{2}d + x} \times y}$$ pour abreger on supposera comme

on a fait $\frac{1}{2}d + x = b$. & $dx + x^2 = q$. par consequent FO $= \frac{qz}{by}$

Donc LC$=$IC$-$FO$= \overline{b^2u - qz} : by$ &

LA$=$LC$-$AC$= \overline{b^2u - qz - \frac{1}{2}dby} : by$

LB$=$LC$+$CB$= \overline{b^2u - qz + \frac{1}{2}dby} : by$

mais AP, PB : AL, LB, $:: \overline{PM}^2 : \overline{OL}^2$

$$q : \frac{b^4u^2 - 2b^2qzu + q^2z^2 - \frac{1}{4}d^2b^2y^2}{b^2y^2} = y^2$$

$$\text{Donc } \overline{OL}^2 = \frac{b^4u^2 - 2b^2qzu + q^2z^2 - \frac{1}{4}d^2b^2y^2}{b^2q}.$$

Or y^2 étant $= \overline{dx + x^2} \times p : d$ & $\overline{dx + x^2} = q$

Nous aurons $y^2 = pq : d$: cette valeur étant donc ſubſtituée dans $\overline{OL}^2$ on aura :

$$\overline{OL}^2 = \frac{b^4 u - 2 b^2 q z u + q^2 z^2 - \frac{1}{4} d b^2 p q.}{b^2 q.}$$

Et puiſque auſſi $OL = z^2 - 2 z u + u^2$. on aura une équation, ſur laquelle operant de même, que nous avons fait dans l'Ellipſe, on trouvera $z^2 = \frac{\frac{1}{4} d b^2 p q + b^2 q u^2 - b^4 u^2}{q^2 - b^2 q.}$

Et nommant à préſent $HN = r$. le reſte du calcul étant le même, on trouvera la même équation pour r^2. Ainſi $HN = HD$, & par conſequent $NG = GO$. Donc la ligne CQ, eſt un diametre; NO, l'ordonnée; le point M, le ſommet &c.

IX. Voici encore quelques proprietés, qui concernent deux la Parabole & le reſte l'Hyperbole, dont on pourra avoir beſoin dans la ſuite.

Si dans la Parabole GACE on tire un ligne CF, parallele à l'axe AD, cette ligne CF ſera à l'abſciſſe de l'axe AD, comme le rectangle des parties de l'ordonnée, c'eſt à dire GF, FE, eſt au quarré de la demi-ordonnée DE. Soit pour cet effet DF, ou $BC = u$. Donc par la nature de la Parabole Fig. 23.

$$DE^2 : BC^2 :: AD : AB.$$

$$y^2 : u^2 :: x : \frac{u^2 x}{y^2}$$ & à cause

de $y^2 = ax$. $ax : u^2 = x : \frac{u^2}{a}$ par consequent

BD, ou $CF = x - \frac{u^2}{a}$. Mais GF, $FE = \overline{y+u} \times \overline{y-u}$.

$= y^2 - u^2$. Ainsi on aura par conversion de raison

$y^2 : y^2 - u^2 = x : x - \frac{u^2}{a}$.

Si dans cette Parabole ACE on nomme $AB = z$. le reste étant comme cy-dessus. On aura CF, ou $BC = x - z$. & $FE = y - u$. & par la nature de la Parabole

$$y^2 = ax. \ \& \ u^2 = az.$$

& par consequent $ax - az = y^2 - u^2$

Mais $y^2 - u^2 = \overline{y+u} \times \overline{-y\ u}$

Donc

$$a : y + u = y - u : x - z.$$

C'est-à-dire le Parametre est à la somme des demi-ordonnées comme leur difference est à la difference des Abscisses, ou bien $GF : a :: CF : FE$.

Si

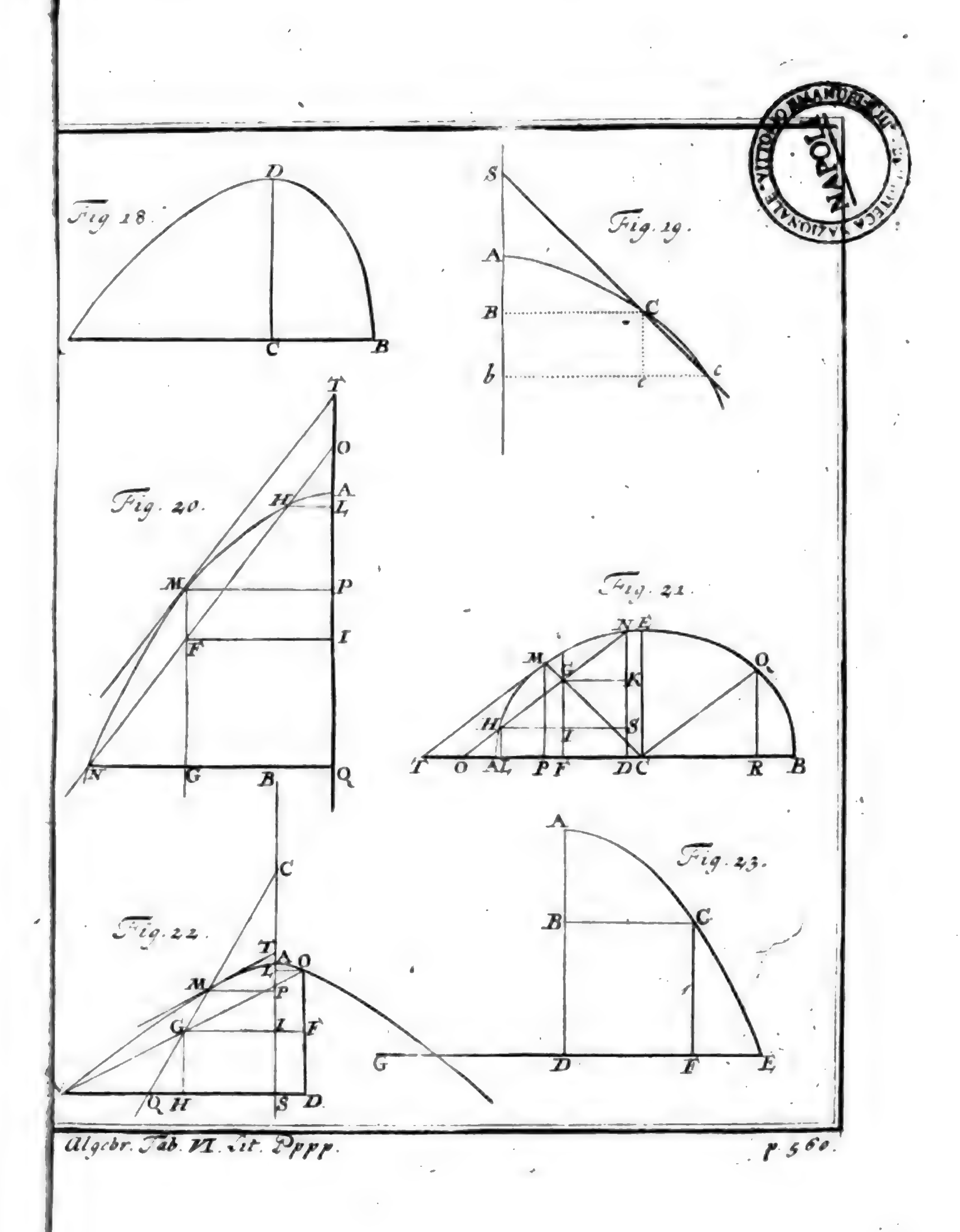


Fig 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.

Digitized by Google

Si dans l'Hyperbole AC, dont *a* A, est le premier diametre, *d* D son diametre conjugué, on prend les abscisses depuis le centre K, ensorte qu'on suppose Fig. 24.

$$aB = x + \frac{1}{2}d$$
$$AB = x - \frac{1}{2}d$$

$$aBA = x^2 - \frac{1}{4}d^2$$

Donc $d : p = x^2 - \frac{1}{4}d^2 : y^2$. & $dy^2 = px^2 - \frac{1}{4}d^2 p$

$$y^2 = \frac{px^2}{d} - \frac{1}{4}dp.$$

On peut encore trouver le rapport de cette hyperbole à son second diametre, prenant pour demi-ordonnée EC, & pour abscisse KE. Car alors on n'a qu'à détacher x^2, dans l'équation précedente

$$y^2 = \frac{px^2}{d} - \frac{1}{4}dp$$

$$y^2 + \frac{1}{4}dp = \frac{px^2}{d}$$

d

$$dy^2 + \frac{1}{4}d^2 p = px^2$$

$p.$ & on aura

$$\frac{d}{p} y^2 + \frac{1}{4} d^2 = x^2$$

$$dp = \delta \delta.$$

& à cause des $\div \pi . d . \delta . p$

$$\frac{d}{p} = \frac{dd}{\delta \delta} = \frac{\pi}{\delta}$$

ou $x^2 = \frac{\pi}{\delta} y^2 + \frac{1}{4} \delta \pi.$

L'équation de la Soutangente de l'Hyperbole étant

$$\frac{d\,x + x^2}{\frac{1}{2} d + x} = s.$$

il est d'abord évident que $s > x$, cependant s ne peut jamais être égal $\frac{1}{2}\, d + x$. Car si on supposoit $s = \frac{1}{2}\, d + x$. on auroit $\frac{1}{4}\, d^2 + d\,x + x^2 = d\,x + x^2$. Ce qui ne peut arriver que lorsque $\frac{1}{2}\, d$ est infiniment petit à l'égard de x.

Fig. 25. Si par le sommet d'une Hyperbole A, on tire la Tangente DE, ensorte que ses parties DA, AE, soient égales chacune à la moitié de l'axe conjugué, & que du point C, milieu du premier axe, on tire par les points D & E, les droites infinies CR, CQ, ces lignes seront les asymptotes de l'Hyperbole. Car

$$CA : AD = CP : PR$$

$$\frac{1}{2} d : \sqrt{\tfrac{1}{4} dp} = \frac{1}{2} d + x : \sqrt{\tfrac{1}{4} dp} + 2x \sqrt{\tfrac{1}{4} dp} : d.$$

Donc $\overline{PR}^2 = \frac{1}{4} dp + px + px^2 : d$

mais $\overline{PM}^2 = px + px^2 : d$

$$\overline{PR}^2 - \overline{PM}^2 = \frac{1}{4} dp = \overline{DA}^2 = QMR.$$

Si du sommet de l'Hyperbole A on tire la ligne AI parallele à l'asymptote CR, son quarré, qui, à cause du $\triangle$ rectiligne CAE & de AI = CI, est $\frac{d^2 + dp}{16}$ s'appelle la Puissance de l'Hyperbole, & il est égal à chaque rectangle que l'on peut faire entre les asymptotes. Soient pour cet effet tirées les lignes NT & NS paralleles aux asymptotes, on aura les triangles semblables NQT, AEI, NRS, & supposant NQ $= z$, NT $= y$, AE $= \delta$,

on aura $\begin{matrix} NQ : NT = AE : AI \\ z : y = \delta : \frac{\delta y}{z} \end{matrix}$. Et parce que QNR $= \overline{AE}^2$

on aura encore $\begin{matrix} NQ : AE = AE : NR \\ z : \delta = \delta \; \frac{\delta\delta}{z} \end{matrix}$ de plus $\begin{matrix} AE : IE = NR : NS. \\ \delta : \frac{\delta y}{z} = \frac{\delta\delta}{z} : \frac{\delta\delta y}{zz} \end{matrix}$

Donc $\frac{CT}{SN}$, NT $= \frac{\delta\delta yy}{zz} = \overline{AI}^2$ d'où on tire l'équation de l'hyperbole entre les asymptotes. Car si on suppose AI $= a$, CT $= x$, & NT $= y$, on aura $a^2 = xy$, si on suppose l'origine des abscisses en un autre point que le centre C, comme en L, & que CL $= b$, on aura CT $= b + x$, & par conséquent $a^2 = by + xy$.

Si entre les asymptotes CQ, CT on tire une ligne droite quelconque HK, qui coupe l'hyperbole aux points E & M, les parties HE, MK qui sont entre l'hyperbole & les asymptotes sont égales. Pour le démontrer on tirera par les points E & M les deux ordonnées à l'axe IG, RS. Soit donc *Fig. 26.*

$RM = a$, $IE = b$, $EG = c$, $HM = x$, $MK = y$

on aura à cause de IE, EG = RM, MS.
$$RM : IE = EG : MS$$
$$a : b = c : \frac{bc}{a}$$

& à cause des $\triangle\triangle \backsim$. RMH, IEH & MSK, EGK

$$RM : HM = IE : EH \qquad MS : MK = EG : EK$$
$$a : x = b : \frac{bx}{a} \quad \& \quad \frac{cb}{a} : y = c : \frac{ay}{b}$$

Donc $EK, EH = abxy : ab = xy = HM, MK$

Par conséquent $EK : MK = HM : EH$,

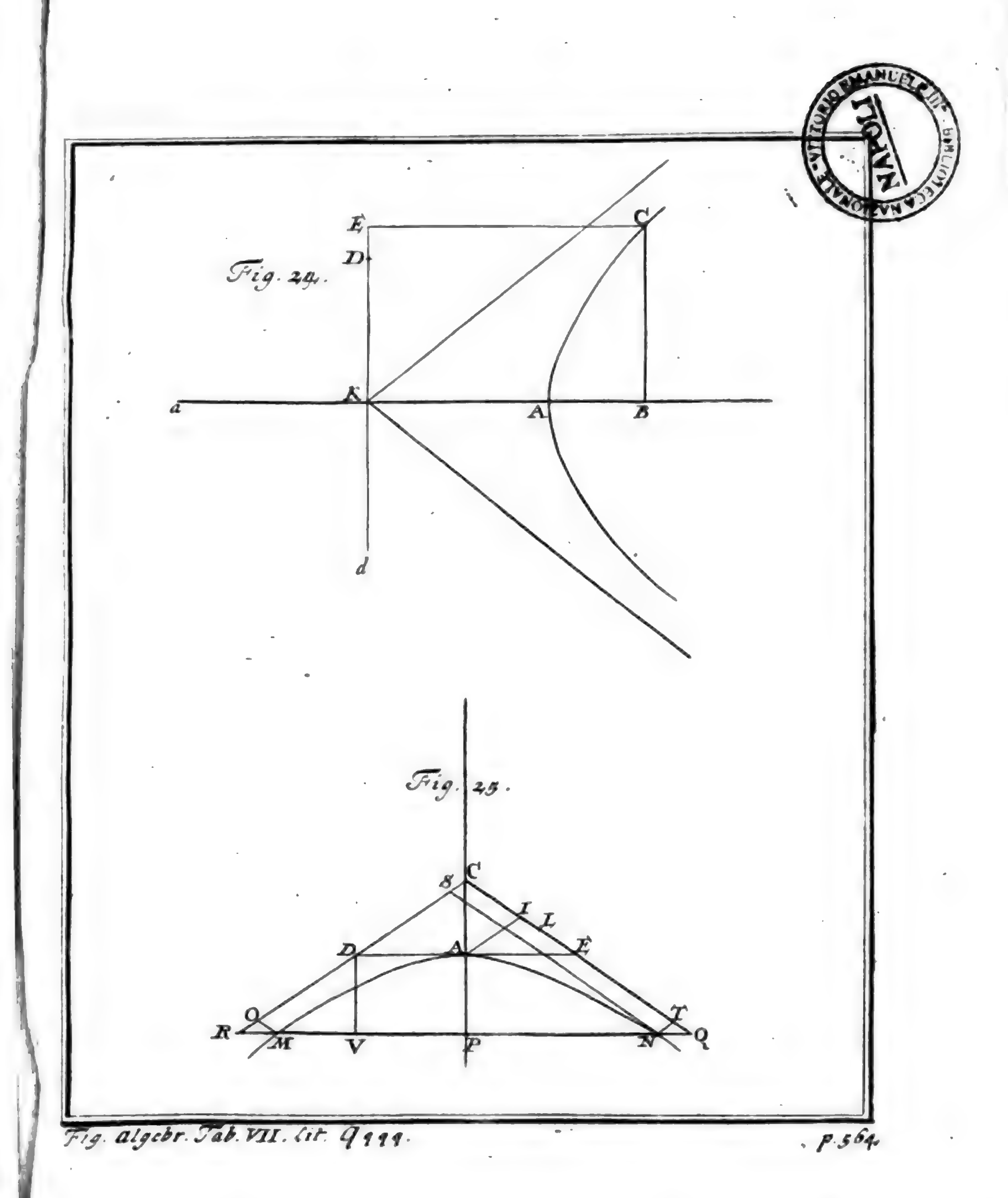
$$EK - MK : MK = HM - EH : EH$$

$$EM : MK = EM : EH$$

$$MK = EH$$

Ainsi la position des asymptotes CQ, CT étant donnée avec un seul point de l'hyperbole, comme M, on pourra trouver tous les points de l'hyperbole que l'on voudra, en faisant toujours HE = MK.

Fig. 27. a X. Qu'on tire la droite indéfinie BD, qui soit Coupée en E par la perpendiculaire AC; si du point C on tire plusieurs lignes qui coupent la droite BD en des points comme QEQ, & que l'on mette sur ces lignes de part & d'autre la longueur AE en M, M, N, N, la Courbe qui joint tous les points M, M est appellée premiere



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Fig. algebr. Tab. VII. lit. Q 1 1 1.

p. 564.

Digitized by Google

Conchoïde, & celle qui joint les point N, N, eſt appellée ſeconde Conchoïde. On voit d'abord que l'une & l'autre de ces deux lignes s'approche de plus en plus de la droite BD, ſans pourtant concourir avec elle; donc elle eſt leur aſymptote. On peut décrire cette Courbe d'un mouvement continu par le moyen de deux régles, dont l'une eſt appliquée à la ligne BD, pendant que le point E de l'autre qui eſt marquée par la ligne AC, parcourt la premiere, enſorte que vers l'une de ſes extrémités elle ſe trouve toujours appliquée à une pointe fixe en C; car ſi à cette derniere régle on fait deux pointes, l'une en A, l'autre en F, ces deux pointes décriront l'une la Conchoïde ſupérieure MAM, & l'autre l'inférieure NFN. Pour trouver l'équation de cette Conchoïde ſoit, QM, ou AE$=a$, EC$=b$, MR, ou EP $=x$, ER ou PM $=y$, on aura CP$=b+x$ &

PE : MQ = EC : CQ.

$$x : a = b : \frac{ab}{x} \quad \text{Donc CM} = \overline{ax+ab}:x$$

& à cauſe de $\overline{PM}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{CM}^2$ On aura

$$y^2+x^2+2bx+b^2 = \overline{a^2b^2+2a^2bx+a^2x^2}:x^2$$

$$\text{ou} \quad x^4+2bx^3+y^2x^2+b^2x^2 = a^2b^2+2a^2bx+a^2x^2$$

$$1 : \frac{a^2}{x^2} - 1 = \overline{b+x}^2 : y^2$$

pour la premiere Conchoïde. Soit à préſent pour la ſeconde CE$=b$, QN $=a$, EG ou ON$=x$, GN ou EO$=y$, on aura GC $=b-x$, &

$$EG : QN = GC : CN$$
$$x : a = b - x : \frac{ab - ax}{x}$$

Et à cause de $\overline{CN}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{GN}^2$, on aura pour derniere équation $a^2 b^2 - 2 a^2 bx + a^2 x^2 = b^2 x^2 - 2 bx^3 + x^4 + x^2 y^2$.

Ce qui fait voir que l'une & l'autre est une Courbe du troisiéme genre. Les Anciens se sont servi de la Conchoïde pour trouver deux moyennes proportionelles de suite entre deux lignes données. On peut faire une autre espece de Conchoïde, en faisant

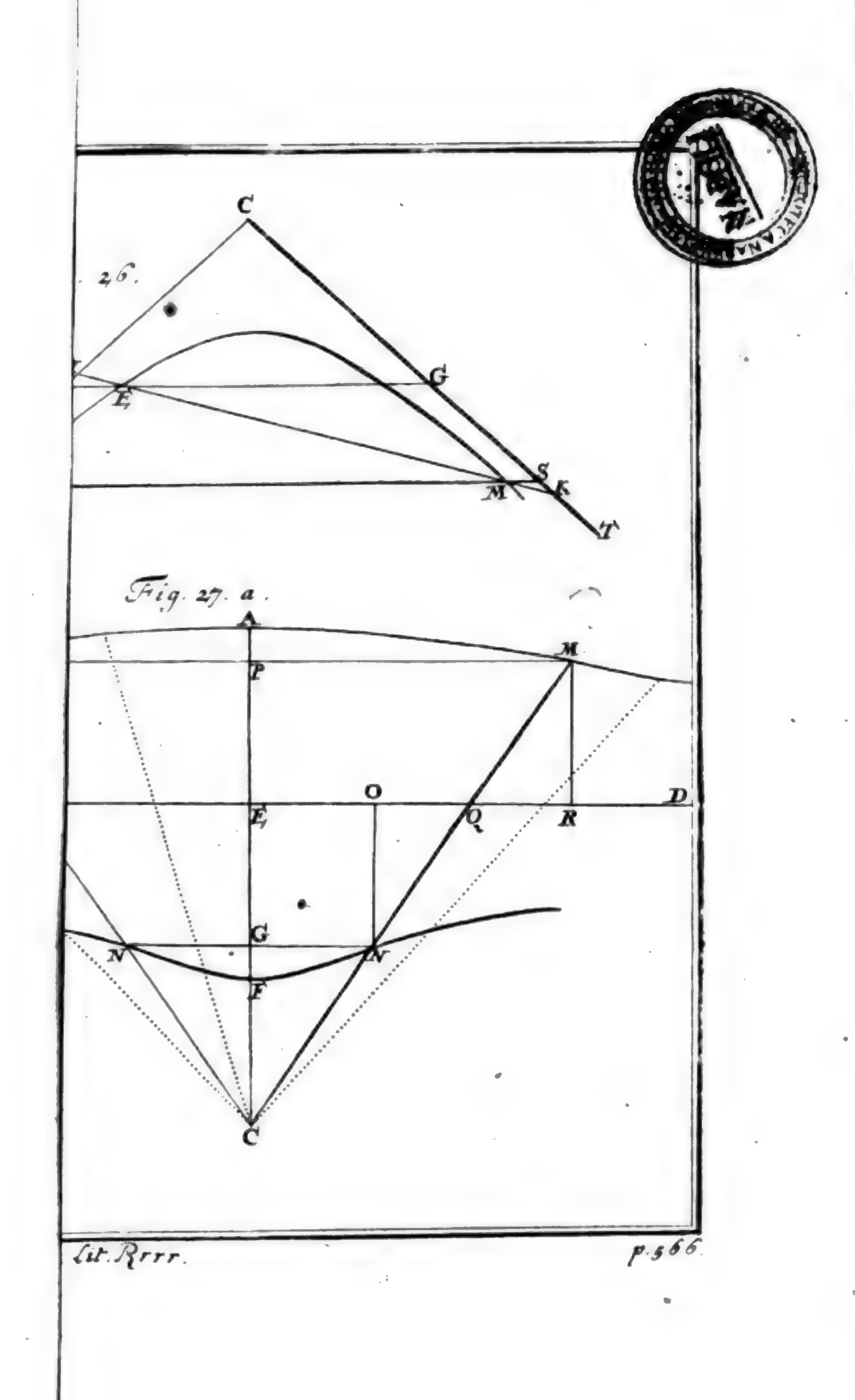
$$\begin{matrix} CE & : & CQ & = & QM & : & AE \\ b & : & x & & y & : & a. \end{matrix}$$ dans laquelle $ab = xy$

On peut encore décrire une Conchoïde à l'entour d'un Cercle. Soit pour cet effet le centre C pris sur la circonference du Cercle, & la ligne AE ou QM toujours égale au rayon. Cette Conchoïde donnera facilement la trisection de l'angle, comme il est évident par la figure.

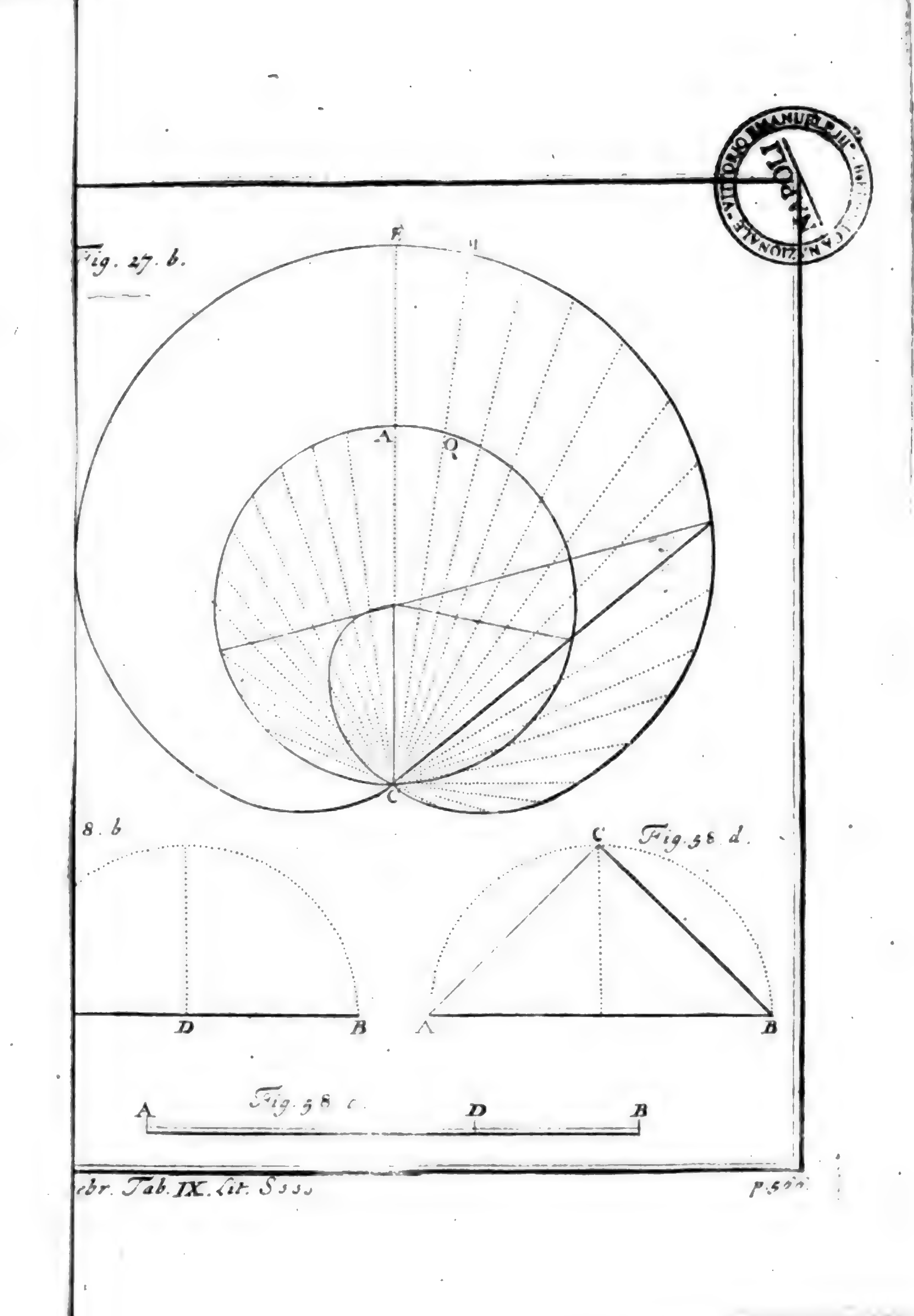
Fig. 27. b

Fig. 28.

X. Si au diametre AB du demi-cercle AOB, & à son extrémité B, on joint la perpendiculaire indéfinie BC, & que de l'autre extrémité A on tire la droite AH, qui coupe le demi-cercle en I, & que l'on tire aussi du même point A la droite AC, qui coupe l'autre quart de cercle en N, ensorte que AM = HI & LC = AN, les deux points L, M seront dans une courbe appellée Cissoïde. Il est d'abord évident que cette Courbe passera aussi par le point O; milieu du demi-cercle. On trouve dans cette Courbe



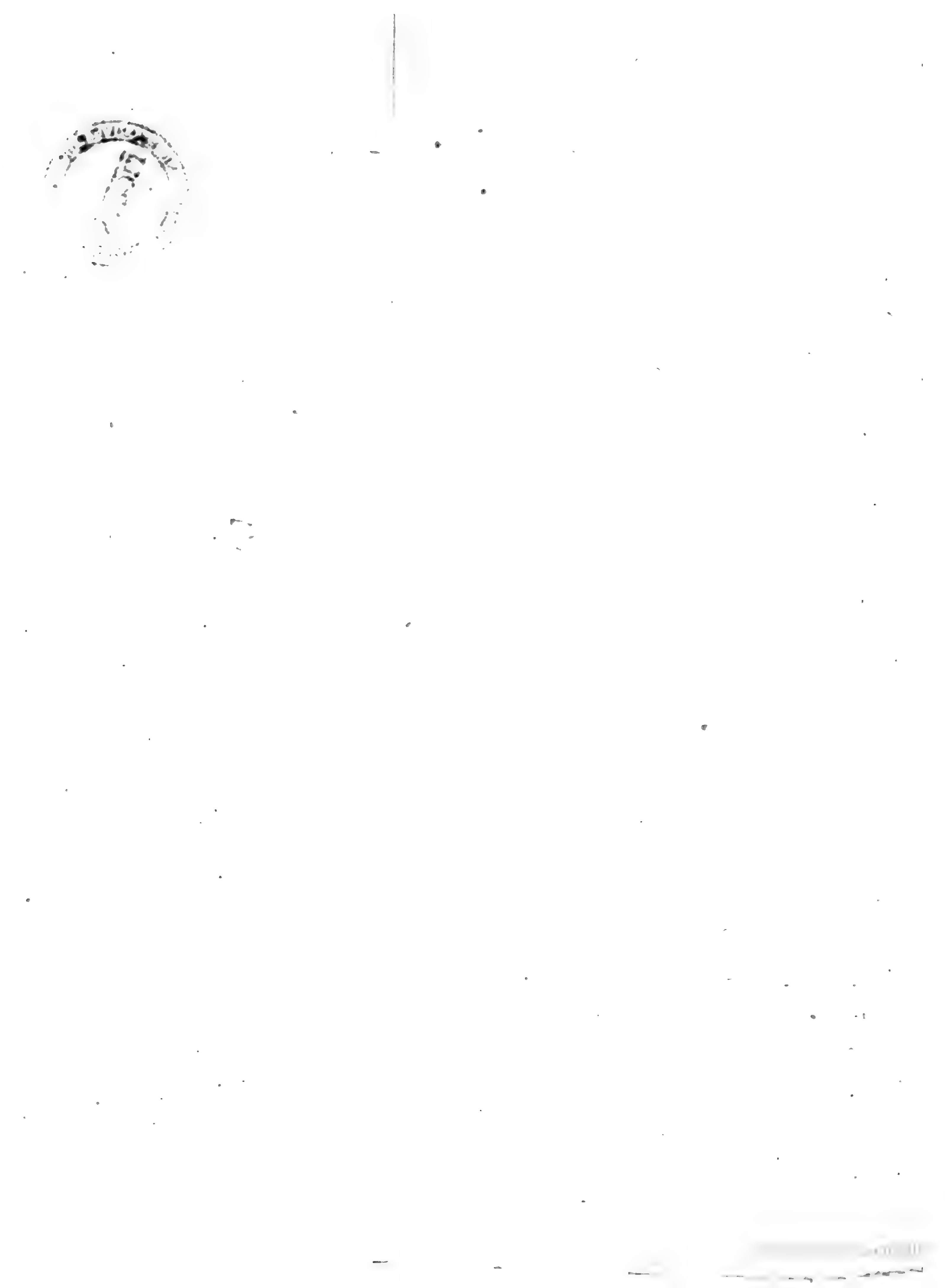
. 26.
C
G
E
S
M
K
T
Fig. 27. a.
A
M
P
O
D
E
Q
R
G
N
N
F
C
lit. Rrrr.
p. 566



ebr. Tab. IX. Lit. Ssss

p. 5

BIBL. NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI



$$AK : \frac{PN}{KI} = \frac{PN : AP}{KI : KB}$$

---

donc $AK : \frac{KI}{PN} = AP : PM$ ∻ on trouve de

même $AP : PN = AK : KL$ ∻

Pour trouver l'équation de la Ciſſoïde ſoit $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$.

On aura AK, ou $PB = a - x$. $\overline{KI}^2$ ou $\overline{PN}^2 = ax - x^2$

$$\overline{AK}^2 : \overline{PN}^2 = \overline{AP}^2 : \overline{PM}^2$$

Donc

$$a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$$

$$a^2y^2 - 2axy^2 + x^2y^2 = ax^3 - x^4$$

$a - x$ ―――――――――――

$$ay^2 - xy^2 = x^3.$$

$\overline{a - x}, y^2 = x^3$. Par conſequent

la Ciſſoïde eſt une Courbe du ſecond genre. Lorſque le point P tombe ſur B, on aura $x = a$, & $BC = y$. par conſequent $y^2 = \frac{a^3}{o}$ c'eſt-à-dire $o : 1 = a^3 : y^2$. Ce qui rend la valeur de y, infinie donc BC, eſt l'aſymptote de la Ciſſoïde.

Fig. 29. II. Si on divise un quart de cercle ABD en tant de parties égales que l'on voudra, & que le rayon AC, soit divisé de même, tirant les rayons DC, &c. de même que les lignes EF &c. paralleles à BC. Les points de concours FF &c. seront dans une Courbe que les Anciens ont appellé Quadratrice. Il est évident par cette construction que le quart de Cercle $\underset{a}{AB}$ est au rayon $\underset{b}{AC}$, comme chaque arc $\underset{y}{AD}$, est à chaque $\underset{x}{AE}$. Donc $ax = by$. Moyennant cette Courbe on peut diviser un arc de Cercle selon une raison donneé, en divisant de même son abscisse correspondante & tirant par le point correspondant de la Courbe un rayon, comme il est aisé de connoitre. Le dernier point de cette Courbe n'est point déterminé.

Fig. 30. XII. Voicy une autre Quadratrice où les lignes DF sont paralleles au rayon AC, au lieu que dans la précedente elles sont parties du rayon DC, On a encore dans celle-cy comme dans la précedente

$$AB : AC = AD : AE$$

$$a : b = y : x \qquad ax = by$$

Outre les belles proprietés de cette Courbe, elle a encore celle, que par son moyen on peut diviser un angle donné. selon une raison donnée.

Fig. 31. XIII. Si on conçoit le Rayon AC. dont l'extremité A, decrit le Cercle AP p. &c. pendant que le même rayon est parcouru par un point comme m. Le mouvement supposé uniforme de part & d'autre; ce point m décrira une Courbe appellée la premiere Spirale d'Archimede.

Si

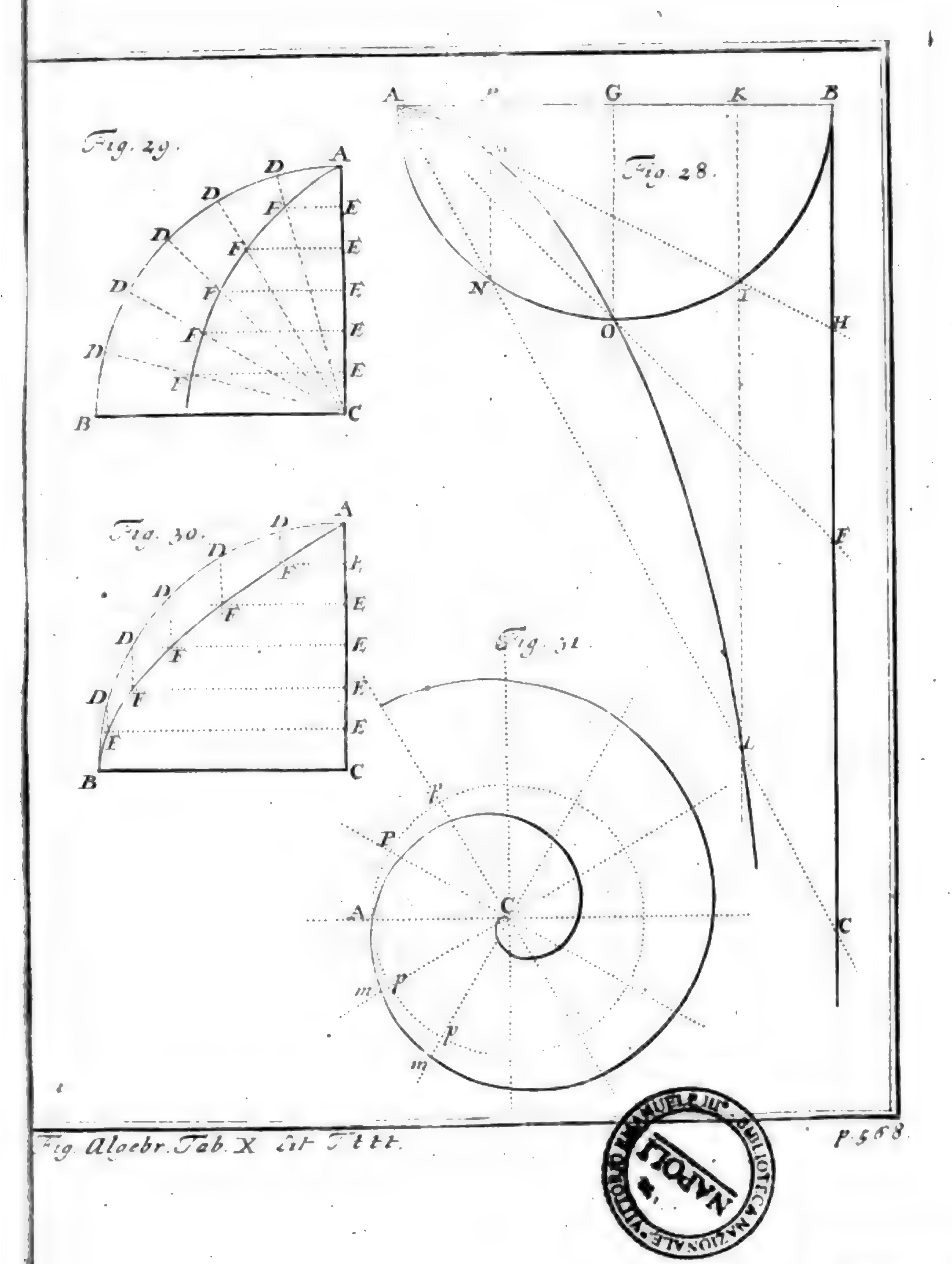
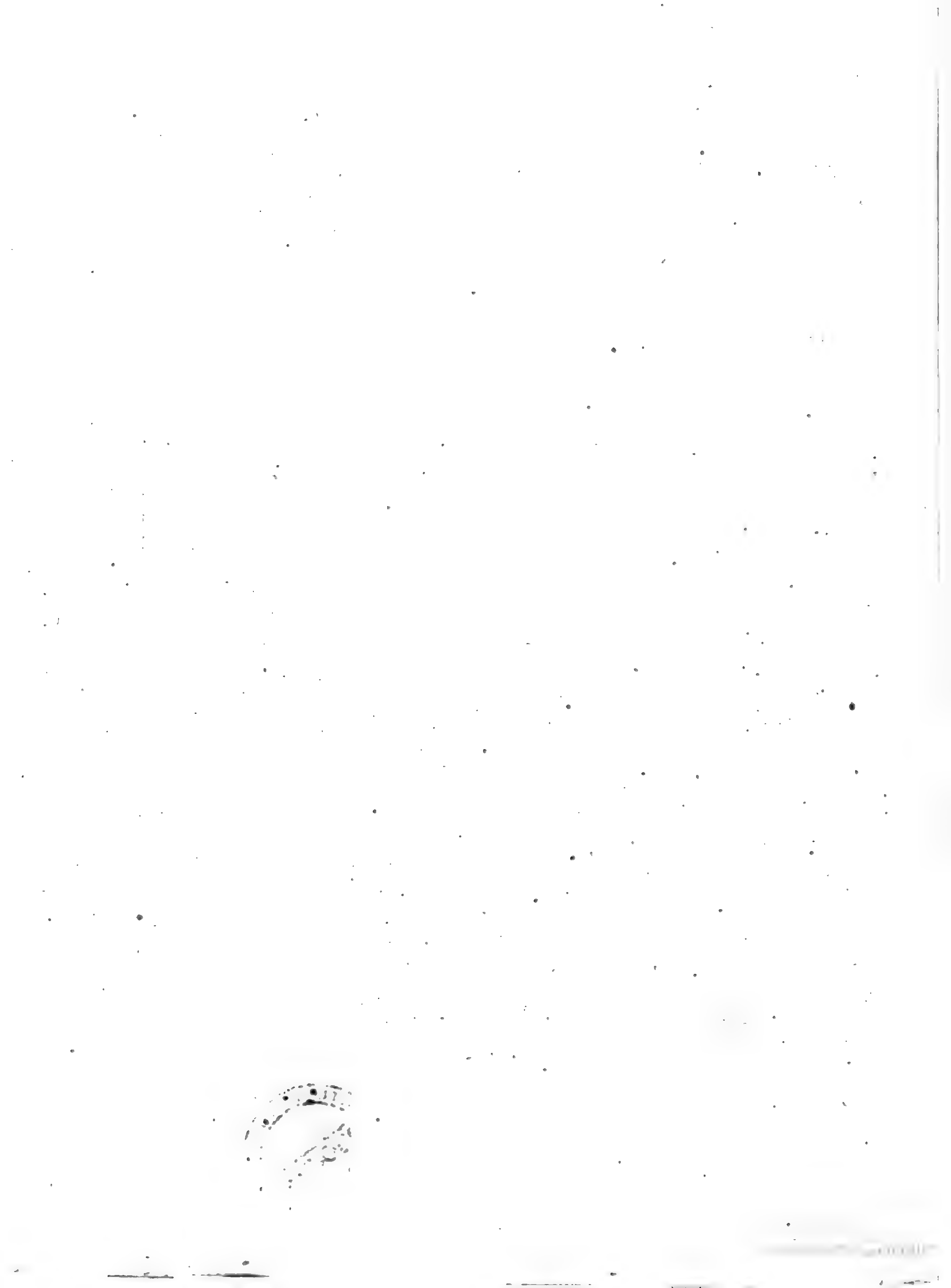


Fig. Algebr. Tab. X. &c. Tttt.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI



Si on conçoit que le point m. commence à se mouvoir en sens contraire de C. vers A, &c. le rayon AC étant prolongé, on peut continuer cette Spirale aussi loin que l'on veut. Ainsi son second tour sera la deuxiéme Spirale, &c. Si dans cette construction on nomme toute la circonference du Cercle c, la partie $AP = x$. $AC = r$. $PM = y$. on aura $c : x = r : y$; par conséquent $rx = cy$. comme dans les deux précedentes.

XIV. La Cycloïde ou la Roulette est une ligne Courbe formée par un point a, de la circonference d'un Cercle qui roule sur la ligne droite AC. Ainsi la ligne AC est égale à la circonference du Cercle generateur; AD, à la demie circonference; Et dans quelque situation du Cercle generateur que ce soit, on aura la petite partie de la base $Ad = Pd$, par consequent $Pb = dD = NL = PM = MB$. Donc prenant l'arc BM pour l'Abscisse, PM pour la demi-ordonnée, on aura $x = y$. Si le Cercle generateur roule sur une autre circonference circulaire, le point a décrira une Epycicloïde, qui sera exterieure ou interieure, suivant qu'on suppose que le Cercle roule sur la partie convexe ou sur la concave. Cette ligne de même que les précedentes n'est point Geometrique, puisque l'équation, qui en exprime la nature, ne se rapporte pas uniquement à des lignes droites. Fig. 32.

XV. Si on prend sur une ligne droite tant de parties égales que l'on voudra, & que l'on éleve à ces points de division des lignes droites perpendiculaires, qui soient en progression Geometrique, la Courbe qui joindra les extremités de ces perpendiculaires est appellée Logarithmique. Il est évident que les Abscisses sont les Loga-

rithmes des demi-ordonnées. On peut de même décrire des Courbes, qui seront des lignes de Sinus, de Tangentes, &c.

CHAPITRE QUATRIE'ME.

Des Lieux Geometriques.

LA ligne qui sert à résoudre geometriquement un Problême indéterminé, s'appelle un Lieu Geometrique; par ceque tous les points de cette ligne peuvent satisfaire à la question proposée. Ainsi on y trouve autant de valeurs differentes de y, qu'on en donne de differentes à x. ce qui n'est pas de même dans les Problêmes déterminés. Si la ligne est droite on l'appelle un Lieu à la ligne droite; si elle est circulaire on l'appelle un Lieu au Cercle, & ainsi des autres.

II. Voicy des Equations pour construire des Lieux à la ligne droite $y = ax : b$. $y = \overline{ax : b} + c$. $y = \overline{ax : b} - c$. $y = c - \overline{ax : b}$.

Fig. 33. Soit AE : EF = AG : GH

$$b : a = x : y \quad \text{Donc } \frac{ax}{b} = y$$

Soit AD, ou GI $= c$, on aura HI $= \overline{ax : b} + c = y$, de même PG $= c$. on aura HP $= \overline{ax : b} - c = y$; On tirera de ce-cy aisément la construction pour la quatriéme formule.

III. On sçait par la nature du Cercle expliquée dans la Geometrie, que le diametre AB étant $= a$. L'abscisse AC $= x$. & la demi-ordonnée DC $= y$. on aura $yy = ax - x^2$ qui est d'abord un Lieu au Cercle. Lorsque l'on a l'Equation suivante $y^2 - by = ax - x^2$, on fera d'abord evanoüir les seconds termes by & ax, en supposant 1°. Fig. 34.

$$y = t + \tfrac{1}{2} b$$

$$y^2 = t^2 + bt + \tfrac{1}{4} b^2$$
$$-by = -bt - \tfrac{1}{2} b^2$$

$$y^2 - by = t^2 - \tfrac{1}{4} b^2$$

2°. On supposera

$$x = u + \tfrac{1}{2} a$$

$$-x^2 = -u^2 - au - \tfrac{1}{4} a^2$$
$$+ax = +au + \tfrac{1}{2} a^2$$

$$ax - x^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - u^2$$

$$t^2 - \tfrac{1}{4} b^2 = \tfrac{1}{4} aa - u^2$$

$$t^2 = \tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{4} a^2 - u^2$$

L'Equation ainsi réduite au premier cas, voici de quelle maniere on en fera la construction. Soit CD $= \tfrac{1}{2} b$ Fig. 35. GD $= \tfrac{1}{2} a$, on aura CG $= \sqrt{\tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{4} a^2}$; ainsi décrivant du point C comme centre, & de l'intervalle CG un Cercle, & tirant par C, la droite AB parallele à GD, on

Digitized by Google

ſuppoſera $CP = u$; ce qui donnera $PM = t$, & par conſequent $GR = x$, & $MR = y$.

IV. Les Equations des Sections Coniques par rapport à leur Diametre, étant diſpoſées de façon que o. en ſoit le ſecond membre, on y remarquera, que dans l'équation à la Parabole l'une des inconnuës eſt élevée au quarré, l'autre n'étant que lineaire ; dans l'Ellipſe elles ſont toutes deux elevées au quarré avec le même ſigne +; & dans l'Hyperbole elles le ſont auſſi, mais avec differens ſignes. *Si* dans l'Equation à l'Ellipſe $d = p$, & que les y ſont perpendiculaires aux x, l Equation eſt celle du Cercle, & ſi dans l'Equation à l'Hyperbole $d = p$, c'eſt une marque que l'Hyperbole eſt équilatere ; & elle l'eſt auſſi, ſi l'angle des aſymptotes eſt droit. Ces Equations par rapport aux Diametres ont le moins de termes qu'il eſt poſſible ; & parce que le plus ſouvent les Equations locales, que l'on veut conſtruire, ont plus de termes, il eſt neceſſaire d'avoir des Equations locales, qui ayent tant des termes qu'il eſt poſſible. Ces Equations ſerviront de formules génerales, & on y comparera celles que l'on aura à conſtruire. Ces Equations génerales expriment le rapport des points de chaque Courbe à une ligne droite, donnée de poſition ſur le même plan, laquelle ne ſoit point parallele au Diametre de la Courbe. Voici de quelle maniere on les découvre ;

Pour la Parabole.

Fig. 36. Soit la Parabole AC, dont l'Equation par rapport à ſon Diametre AB, ſoit $yy - px = o$ enſorte que $AP = p$, les $AB = x$, & les $BC = y$, qui ſont avec AB l'angle

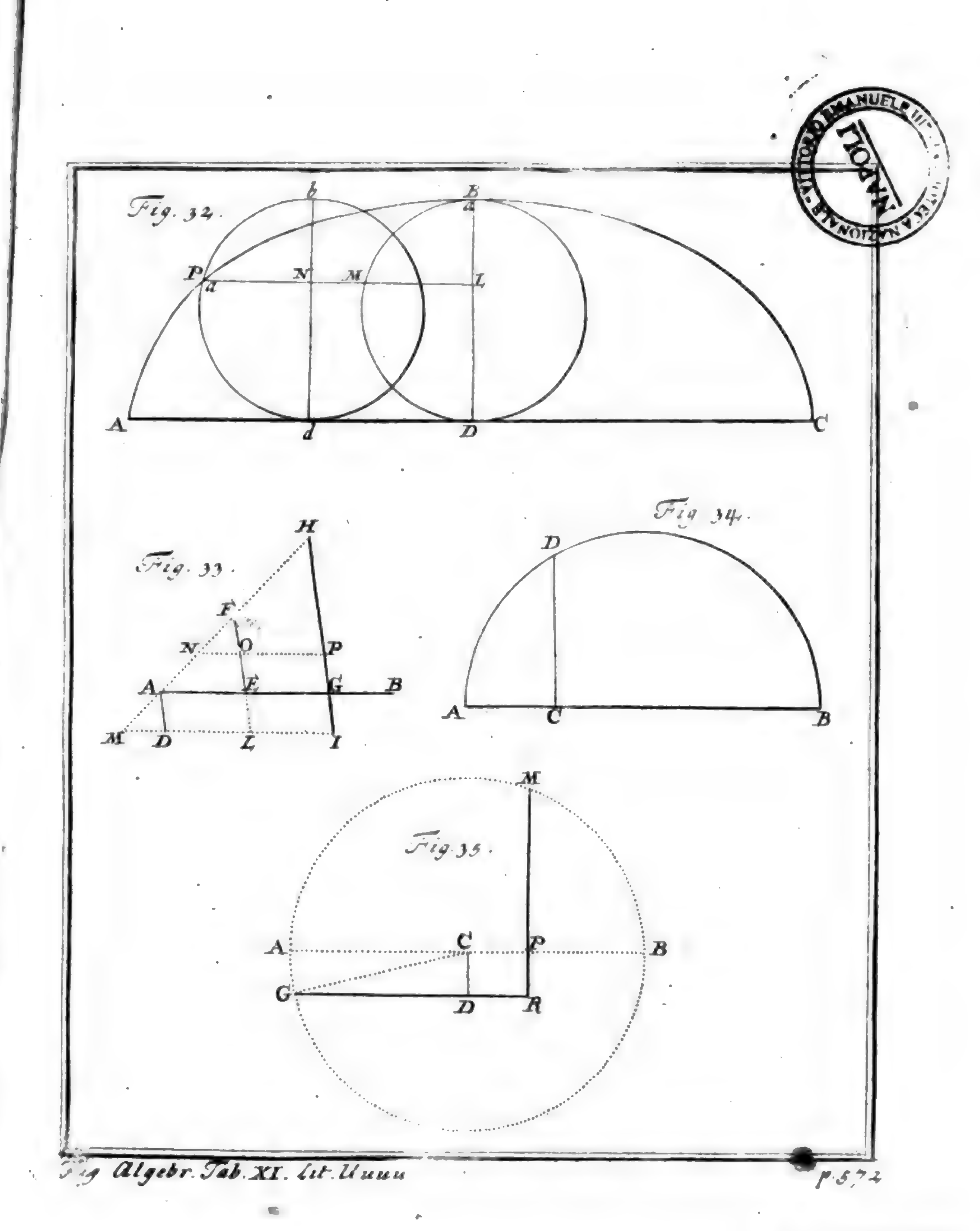


Fig. 32.
b
B
a
P
a
N
M
L
A
d
D
C
Fig. 33.
H
F
N
O
P
A
E
G
B
M
D
L
I
Fig. 34.
D
A
C
B
M
Fig. 35.
A
C
P
B
G
D
R

Digitized by Google

donné. Soit aussi la ligne ON donnée de position sur le même plan, & dont l'origine soit en O, il s'agit de trouver l'Equation de la même Parabole AC par rapport à cette ligne ON. Pour cet effet il faut tirer par O la droite OM, parallele au diametre AB, mener par le Sommet A, la droite $AL = l$, parallele aux ordonnées, & prolonger l'Ordonnée CB jusques en N, qui coupera OLM en M. Ensuite on prendra sur ON, une grandeur déterminée $OF = f$, & tirant FG parallele aux ordonnées, on nommera $FG = g$, & $OG = h$. On supposera $ON = u$. $NC = z$. OL, qui est donnée, est $= i$. Et on aura à cause des △△ ∽ OGF, OMN.

$$\left.\begin{array}{l} OF : ON = FG : NM \\ f : u = g : \frac{g}{f}u \end{array}\right\} \& \begin{array}{l} OF : ON = OG : OM. \\ f : u = h : \frac{h}{f}u \end{array}$$

Par consequent $BC = NC - NM - MB = z - \frac{g}{f}u - l$. & $AB = OM - OL = \frac{h}{f}u - i$. & substituant dans l'Equation $yy - px = 0$. ces valeurs de $\overline{BC}^2$ & de AB, on aura

$$z^2 - \frac{2g}{f}uz - 2lz + \frac{gg}{ff}uu + \frac{2gl}{f}u + ll = 0.$$
$$- \frac{hp}{f}u + ip$$

Pour l'Equation de la Parabole AC par rapport à la ligne ON.

On se sert de cette formule pour faire la construction d'un Lieu à la Parabole dont l'Equation est donnée. Soit par Exemple : $y^2 + ay - bx + \frac{1}{4} aa$. Comparant les deux Equations ensorte que les x respondent aux u, & les y aux z. c'est-à-dire les Abscisses aux Abscisses, & les Ordonnées, aux Ordonnées il est visible que les coëfficiens des termes de la formule qui n'ont point de correspondant dans l'Equation proposée, sont $= 0$, & que par consequent les lignes marquées par lesdits coëfficiens s'évanoüissent ; tout comme elles doivent être prises de l'autre côté, en cas que les signes soient contraires. Ce-cy nous fera voir que dans le présent cas $\frac{2g}{f} = 0$. $-2l = + a$. $\frac{g^2}{f^2} = 0$. $b = f$. $\frac{bp}{f} = p = b$. $ll = \frac{1}{4} a^2$. $ip = 0$. $i = 0$; ainsi il faudra construire une Parabole dont b soit le Parametre, dans laquelle à cause de $\frac{g}{f} = 0$, le point N, tombe sur M; & à cause de $l = -\frac{1}{2} a$, on aura $y =$ CB — BM. & enfin à cause de $i = 0$. le commencement des x, est en A. Si dans une Equation proposée à la Parabole, x est elevé au quarré, y n'étant que lineaire, le Lieu est à la partie convexe de la Parabole ; & en ce cas on pourra changer dans la formule les z en u, & les u en z, les Abscisses devenant alors des demi-ordonnées, & les demi-ordonnées des Abscisses.

Pour l'Ellipse.

Fig. 37. Soit l'Ellipse ACa, dont le Diametre A$a = d$, le Parametre 2AP $= p$, &c. la ligne ON donnée de position, & son origine en O. Il s'agit de trouver l'Equation de

cette Ellipse par rapport à cette ligne ON. Tout étant fait comme dans la Parabole, & nommant OL ou BM $= l$. KL $= i$. ON $= u$, & NC $= z$. on aura NM $= \frac{g}{f}u$, & OM $= \frac{h}{f}u$. Par consequent BC $= z - \frac{g}{f}u - l$. & KB $=$ OM $-$ LK $= \frac{h}{f}u - i$. Donc AB $= \frac{1}{2}d + \frac{h}{f}u - i$, & B$a = \frac{1}{2}d - \frac{h}{f}u + i$. Or par la nature de l'Ellipse $d : p =$ AB, Ba : $\overline{BC}^2$ ce qui donne après le calcul & le produit des moyens & des extremes fait, pour l'Equation de l'Ellipse par rapport à la ligne ON

$$
\begin{aligned}
z^2 - \frac{2g}{f}uz + 2lz + \frac{g^2}{f^2}u^2 + \frac{2gl}{f}u + l^2 &= 0 \\
+ \frac{h^2p}{df^2}u^2 - \frac{2hip}{df}u + \frac{i^2p}{d}& \\
- \tfrac{1}{4}dp&
\end{aligned}
$$

Comparant à cette Equation generale celle d'une Ellipse donnée, par Exemple :

$y^2 + \frac{e}{b}x^2 - \frac{aae}{b} = 0$. On aura

$$\frac{2g}{f} = 0 \qquad \frac{p}{d} = \frac{c}{b}$$

$$2l = 0$$

$$f = b$$

$$\frac{g^2}{f^2} = 0 \qquad \frac{1}{4}dp = \frac{a^2 p}{d}$$

$$\frac{1}{4}d^2 = a^2$$

$$\frac{2ip}{d} = 0 \qquad \frac{1}{2}d = a.$$

Quand dans l'Equation de l'Ellipse $d = p$, & que l'angle des Ordonnées avec le Diametre est droit, l'Equation de l'Ellipse devient celle du Cercle, & alors l'angle OMN étant droit $\overline{OF}^2$ $(ff) = \overline{FG}^2$ (gg) + $\overline{OG}^2$ (hh) ainsi mettant au lieu de hh, sa valeur $f^2 - g^2$. & d, à la place de p, l'Equation devient

$$z^2 - \frac{2g}{f}uz - 2lz + uu + \frac{2gi}{f}u + l^2 = 0$$
$$- \frac{2hi}{f}u + i^2$$
$$- \frac{1}{4}d^2$$

Pour l'Hyperbole par rapport à ses Diametres.

Fig. 38. Soit l'Hyperbole AC, dont le premier diametre $Aa = d$; le Parametre $AP = p$; la ligne ON donnée de position, dont l'origine est en O. Il s'agit de trouver l'Equa-

l'Equation de cette Hyperbole par rapport à la ligne ON. On ſuppoſera les données AL ou BM $= l$, Ol, ou Ki $= i$, & le reſte comme cy-deſſus ; ce qui donnera encore NM $= \frac{g}{f} u$, OM $= \frac{h}{f} u$. Ainſi on aura l'ordonnée BC $= z - \frac{g}{f} u - l$, & à cauſe de BK $=$ OM $-$ Ol $= \frac{h}{f} u - i$, aB $= \frac{h}{f} u - i + \frac{1}{2} d$, & AB $= \frac{h}{f} u - i - \frac{1}{2} d$, & par la nature de l'Hyperbole la derniere Equation par rapport à la ligne ON, ſera :

$$z^2 - \frac{2g}{f} uz - 2lz + \frac{g^2}{f^2} u^2 + \frac{2gl}{f} u + l^2 = 0$$
$$- \frac{h^2 p}{df^2} u^2 + \frac{2hip}{df} u - \frac{i^2 p}{d}$$
$$+ \tfrac{1}{4} d p.$$

Si on rapporte l'Hyperbole à ſon ſecond Diametre dD, on trouve l'Equation $x^2 - \frac{\pi}{\delta} y^2 - \frac{1}{4} \delta\pi = 0$. Dont faiſant la ſubſtitution, on aura pour l'Equation de l'Hyperbole par rapport à la ligne On.

$$z^2 - \frac{2g}{f} uz - 2lz + \frac{g^2}{f^2} u^2 + \frac{2gl}{f} u + l^2 = 0$$
$$- \frac{h^2 \pi}{\delta ff} u^2 + \frac{2hi\pi}{\delta f} u - \frac{i^2 \pi}{\delta}$$
$$- \tfrac{1}{4} \delta\pi.$$

Digitized by Google

où il n'y a que $\frac{1}{4}\,\delta\pi$, sous le ligne — au lieu que dans la précedente nous avions $\frac{1}{4}\,d\,p$, sous le signe +

Lorsque l'Hyperbole est équilatere, les grandeurs π, d, δ, p, sont égales; par conséquent l'Equation generale est

$$z^2 - \frac{2g}{f}uz - 2lz + \frac{g^2}{f^2}u^2 + \frac{2gl}{f}u + l^2 = 0.$$
$$-\frac{h^2}{f^2}u^2 + \frac{2hi}{f}u - i^2$$
$$\pm \frac{1}{4}d^2.$$

Il y a $+\frac{1}{4}d^2$ quand c'est le premier Diametre, & $-d^2$ quand c'est le second.

Soit par Exemple, l'Equation donnée d'une Hyperbole $y^2 - \frac{c}{b}x^2 + \frac{aac}{b} = 0$, comparant tous ses termes à ceux de l'Equation generale, on trouvera

$$\frac{2g}{f} = 0 \qquad 2l = 0 \qquad \frac{g^2}{f^2} = 0 \qquad i = 0$$

$$f = b$$

$$\frac{p}{d} = \frac{c}{b}$$

$$\frac{1}{4}\,dp = \frac{a^2 p}{d}$$

$$\frac{1}{4}\,d^2 = a^2$$

$$\frac{1}{2}\,d = a.$$

D'où on tirera facilement le reste.

Pour l'Hyperbole par rapport aux Asymptotes.

Soit l'Hyperbole cPC, & ses asymptotes Kb, KB; soit aussi la ligne droite ON, donnée de position, dont l'origine est en O, à laquelle il faut rapporter l'Equation entre les asymptotes $xy - ab = 0$. Or supposant $KL = i$, $OL = l$, & le reste comme cy-dessus, & substituant au lieu de x, $KB = \frac{h}{f}u - i$; & à la place de y, $BC = z - \frac{g}{f}u - l$, l'Equation finale sera Fig. 39.

$$uz - \frac{fiz}{h} - \frac{g}{f}u^2 - lu + \frac{fil}{h} = 0$$
$$+ \frac{gi}{h}u - \frac{abf}{h}$$

V. Voici quelques exemples de Problêmes indéterminés, qui peuvent servir d'application.

I.° Faire un quarré égal à un rectangle, dont la difference des côtés est donnée.

Soit la difference des cotés $= b$.
Le petit côté du rectangle $= x$.
Le grand côté du rectangle $= x + b$
Le côté du quarré $= y$

Donc $y^2 = x^2 + bx$, ou $y^2 - x^2 - bx = 0$.

Cette Equation est à l'Hyperbole, & étant comparée à la formule generale on y trouvera :

$\frac{2g}{f} = 0$ $\quad h = f$ $\quad -\frac{p}{d} = -i,$

$2l = 0$ $\quad + 2i = -b$

$\frac{g^2}{f^2} = 0$ $\quad i = -\frac{1}{2}b$

Donc $p = d$. Par conséquent l'Hyperbole est équilatere.

Ainsi le Diametre est $= b$

Fig. 40. II. Construire sur une ligne donnée AB, un triangle tel que les quarrés des côtés AC, BC soient dans une raison donnée $= b : c$.

La base AB $= a$.
Sa partie BD $= x$.
AD $= a - x$.
La perpendiculaire DC $= y$.

$$\text{Donc } b : c = \overline{AC}^2 \, (y^2 + a^2 - 2ax + x^2) : \overline{BC}^2 \, (x^2 + y^2)$$

$$bx^2 + by^2 = cy^2 + a^2c - 2acx + cx^2.$$

$$by^2 - cy^2 + bx^2 - cx^2 + 2acx - a^2c = 0$$

$b - c$

$$y^2 + x^2 + \frac{2acx}{b-c} - \frac{a^2c}{b-c} = 0$$

Comparant cette Equation avec celle de l'Ellipse, on trouvera :

$\frac{2g}{f} = 0$ $\frac{p}{d} = 1$. Donc $p = d$. Par conséquent l'Equation est au Cercle.

$2l = 0$

$\frac{g^2}{f^2} = 0$ $h = f$ $2i = \frac{2ac}{b-c}$ $i^2 - \frac{1}{4}d^2 = -\frac{a^2c}{b-c}$

$$i = \frac{ac}{b-c} \qquad i^2 + \frac{a^2c}{b-c} = \frac{1}{4}d^2$$

$$\frac{a^2c^2}{\overline{b-c}^2} + \frac{a^2c}{b-c} = \frac{1}{4}d^2$$

$$\frac{a^2c^2 + a^2bc - a^2c^2}{(b-c)^2} = \frac{1}{4}d^2$$

$$\frac{a^2bc}{\overline{b-c}^2} = \frac{1}{4}d^2$$

$$\frac{a\sqrt{bc}}{b-c} = \frac{1}{2}d.$$

Soit donc $BL = \frac{ac}{b-c} = i$

Digitized by Google

Ce qui donnera $AL = \frac{ab}{b-c}$

CL, le rayon $= \frac{a\sqrt{bc}}{b-c}$

$AD = x$

$DC = y$ &c.

CHAPITRE CINQUIÈME.

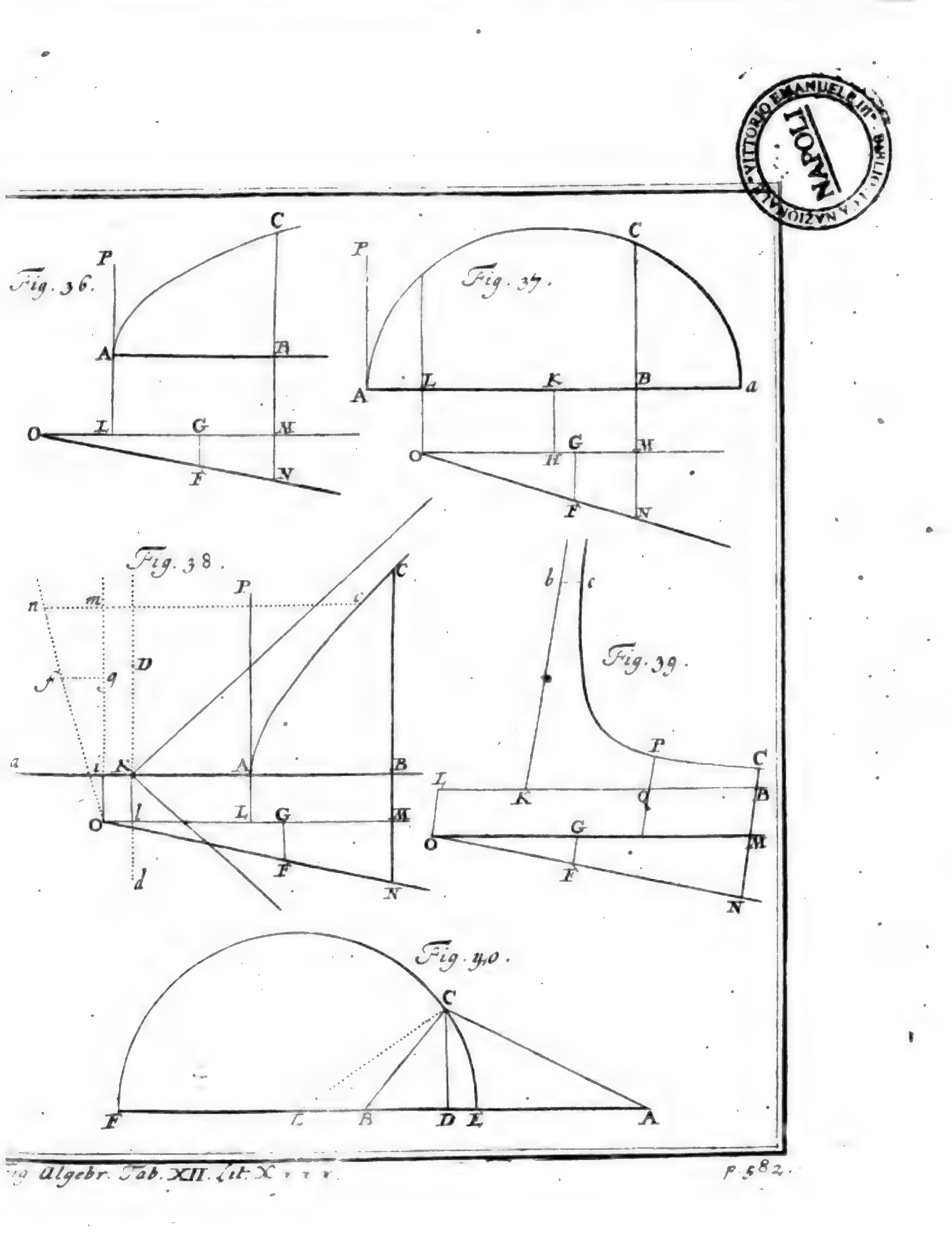
De la Construction des Equations supérieures.

1. POur construire ces sortes d'Equations on y introduit une nouvelle grandeur indéterminée, moyennant laquelle ont transforme la proposée en d'autres locales à differentes Courbes, qui ont chacune deux indéterminées; après quoi construisant deux de ces Equations locales, leur intersection déterminera les racines de la proposée. Soit par exemple à construire l'Equation cubique $y^3 + aby = aac$. Cette Equation donne l'Analogie suivante $a : y = y^2 + ab : ac$, pour y introduire la nouvelle indéterminée

soit $a : y = y : x$.

Donc I.° $ax = y^2$, & par conséquent, $x = y^2 : a$.

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III · NAPOLI

Digitized by Google

De plus $y : x = y^2 + ab : ac$
$= ax + ab : ac$
$= x + b : c$

Donc II.° $x^2 + bx = cy$

$ax = y^2$
$x^2 + bx = cy$

III°. $ax - x^2 - bx = y^2 - cy$

$ax = y^2$
$cy = x^2 + bx$

IV.° $ax - cy = y^2 - x^2 - bx.$

$x^2 + bx = cy$

$x = \frac{y^2}{a}$

$x^2 + \frac{by^2}{a} = cy$; $\frac{a}{b}$

V.° $y^2 + \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$

$y^3 + aby = aac$; a

$\frac{y^3}{a} + by = ac.$

Mais $y^3 = axy.$

VI.° $xy + by = ac.$

Voici donc six Equations locales, dont
la premiere $y^2 - ax = 0.$ eſt à la Parabole.
la ſeconde $x^2 + bx - cy = 0.$ auſſi à la Parabole
la troiſiéme $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0.$ au Cercle.
la quatriéme $y^2 - x^2 + cy - ax - bx = 0.$ à l'Hyperbole équilatere.

la cinquiéme $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0.$ à l'Ellipſe.

la ſixiéme $xy + by - ac = 0,$ à l'Hyperbole entre les aſymptotes.

Deux des ces Lieux, tels que l'on veut, étant combinés, l'Equation propoſée ſe trouve conſtruite. On ſe ſert pourtant par préference du Cercle pour l'un des deux, parce qu'il ſe décrit avec plus de facilité qu'aucune autre Section Conique. Pour conſtruire l'Equation propoſée par le moyen du premier Lieu à la Parabole, & du Lieu
Fig. 42. au Cercle, ſoit décrit du Parametre a la Parabole AM, dont le Sommet A eſt l'origine de l'indéterminée x, de ſorte que AP $= x$, PM $= y$, l'Equation au Cercle donnera $\sqrt{\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2} = \frac{1}{2}d.$ décrivant donc de
Fig. 41. ce rayon $=$ LA, le demi-Cercle AMB, & faiſant LK $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, & KD $= \frac{1}{2}c$, on tirera DQ parallele à AB, & QM, qui eſt parallele à KD, tombera entre K, A, à cauſe de la valeur de i, negative; parce que $b > a$, & l'origine de l'indéterminée x, ſera en D; de ſorte que DQ ſera $= x$, & QM $= y$. A préſent pour combiner ce
Fig. 42. Cercle avec la Parabole, il faut que le point D, origine de l'indéterminée tombe en A, & la ligne DQ ſur AP; ainſi faiſant AK, $=$ DK perpendiculaire à AP, & la perpendiculaire KL $=$ KL, L ſera le centre du Cercle qui paſſe par le Sommet A, & qui coupe la Parabole dans un ſeul point M. Donc la demi-ordonnée PM ſera la racine vraie de l'Equation, & les deux autres ne ſont qu'imaginaires. Pour le démontrer ſoit tirée KR parallele à AP, on aura AK, ou PR $= \frac{1}{2}c$. KL $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$. Donc LA $=$ $\sqrt{\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2}$, ce qui eſt le rayon du Cercle; &

& puisque PM $= y$, MR $= y - \frac{1}{2} c$; de plus AP $=$ KR $= y^2 : a$. Donc LK $= \overline{y^2 : a} + \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} a$. Mais $\overline{LM}^2$ ou $\overline{LA}^2 = \overline{LR}^2 + \overline{MR}^2$, c'est-à-dire,

$$\frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{2} ab + \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} c^2 = \frac{y^4}{a^2} + \frac{by^2}{a} + \frac{1}{4} b^2 - y^2 - \frac{1}{2} ab + \frac{1}{4} a^2 + y^2 - cy + \frac{1}{4} c^2$$

$$\frac{y^4}{a^2} + \frac{by^2}{a} - cy = 0.$$

$$y^4 + aby^2 - aacy = 0.$$

y ———

$$y^3 + aby - aac = 0$$

Autre Exemple. Soit l'Equation quarro-quarrée : $y^4 + aby^2 + a^2 cy = a^3 f$, à construire. Pour y introduire un nouvelle indéterminée, on fera:

$$a : y = y : x.$$

Donc I.° $ax = y^2$, & par conséquent $x = y^2 : a$, substituant cette valeur dans la proposée, on aura :

$$a^2 x^2 + aby^2 + a^2 cy = a^3 f.$$

ab ———

II.° $$y^2 + \frac{a}{b} x^2 + \frac{ac}{b} y = \frac{a^2 f}{b}$$

De plus $a^2 x^2 + a^2 b x + a^2 c y = a^3 f$

$$\frac{}{a^2}$$

III.^{e} $x^2 + bx + cy = af$

$$x^2 + bx = af - cy$$
$$ax = y^2.$$

IV.^{e} $x^2 + bx + ax = y^2 + af - cy$

$$ax = y^2.$$
$$x^2 + bx = af - cy$$
$$- \quad - \quad - \quad +$$

V.^{e} $ax - x^2 - bx = y^2 - af + cy$

La 1. $y^2 - ax = 0$. est à la Parabole.

la 2. $y^2 + \frac{a}{b} x^2 + \frac{ac}{b} y - \frac{a^2 f}{b} = 0$. est à l'Ellipse.

la 3. $x^2 + bx + cy - af = 0$. est à la Parabole.

la 4. $y^2 - x^2 - cy - \begin{matrix} bx \\ - ax \end{matrix} + af = 0$. est à l'Hyperbole (équilatere.

la 5. $y^2 + x^2 + cy + \begin{matrix} bx \\ - ax \end{matrix} - af = 0$. est au Cercle.

Pour construire cette Equation par le moyen du Cercle & de l'Ellipse, on comparera la 5. Equation à l'Equation generale au Cercle, & on trouvera :

$\frac{2g}{f}=0$. $f=b$. $-2l=c$. $-2i=b-a$. $l^2+i^2-\frac{1}{4}d^2=-af$

$l=-\frac{1}{2}c \quad i=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$

$l^2=\frac{1}{4}c^2 \quad i^2=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}b^2$

$$\sqrt{l^2+i^2+af}=\sqrt{\tfrac{1}{4}c^2+\tfrac{1}{4}a^2-\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{1}{4}b^2+af}=\tfrac{1}{2}d.$$

Ainsi tirant la droite d'abord indéterminée AB, on y prendra un point à volonté C, & faisant KC $=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$ on élevera au point K, la perpendiculaire KD $=\frac{1}{2}c$, que l'on a porté vers la gauche, la valeur de $\frac{1}{2}c$, étant sous le signe $-$ & on aura la ligne DC $=\sqrt{\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}b^2}$ Or si on prolonge cette ligne DC, de part & d'autre, & qu'on fasse DI $=a$, & DH $=f$, leur moyenne proportionelle DL sera $\sqrt{af}$, par conséquent on aura CL $=\sqrt{\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}b^2+af}$ pour le rayon du Cercle à décrire, dont C est le centre. Comparant ensuite la 2. Equation avec l'Equation generale à l'Ellipse, on aura : Fig. 43.

$\frac{2g}{f}=0 \qquad f=b \qquad \frac{g^2}{f^2}=0 \qquad 2i=0$

$-2l=\frac{ac}{b} \qquad -l=\frac{ac}{2b} \qquad l^2=\frac{a^2c^2}{4b^2}.$

$\frac{p}{d}=\frac{a}{b} \qquad p=\frac{ad}{b}$

$l^2-\frac{1}{4}dp=\frac{-a^2f}{b}$

$\frac{a^2c^2}{4b^2}-\frac{ad^2}{4b}=-\frac{a^2f}{b}.$ $\quad \frac{a}{b}$

$\frac{ac^2}{4b}+af=\frac{1}{4}d^2$

$$\sqrt{\frac{ac^2}{4b}+af}=\tfrac{1}{2}d.$$

Digitized by Google

Or l'origine de l'indéterminée x, étant en D, la valeur de l étant négative, & celle de $i = o$, on portera DG $= ac : 2b$, du point D, en ſens contraire, afin que le point D ſoit à gauche du diametre de cette Ellipſe ; on tirera par le point G, la droite EF, parallele aux lignes DQ, & AB. Et faiſant EG, ou GF $= \sqrt{af + \frac{ac^2}{4b}}$ cette ligne EF ſera le Diametre de l'Ellipſe ; mais $b : a$, qui eſt la raiſon du Diametre au Parametre étant auſſi connuë, on pourra décrire l'Ellipſe EMFN, dont EF ſera le petit Diametre à cauſe de $b < a$; laquelle coupera le Cercle aux deux points M, N, d'où tirant les lignes NR, MQ, perpendiculaires à DQ, l'une ſera la racine vraie, & l'autre la racine fauſſe de l'Equation propoſée. Car par la nature de l'Ellipſe, on aura :

$$a : b = \overline{SM}^2 : \overline{EG}^2 - \overline{GS}^2 \ (= ES, SF)$$

$$y^2 + \frac{a}{b}cy + \frac{a^2c^2}{4b^2} : af + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$

$$\frac{by^2}{a} + cy + \frac{ac^2}{4b} = af + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$

$$x^2 = af - \frac{by^2}{a} - cy.$$

De plus PM $=$ MQ $+$ QP $=$ MQ $+$ DK $= y + \frac{1}{2}c$

CP $=$ KC $-$ KP $=$ CK $-$ DQ $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - x$.

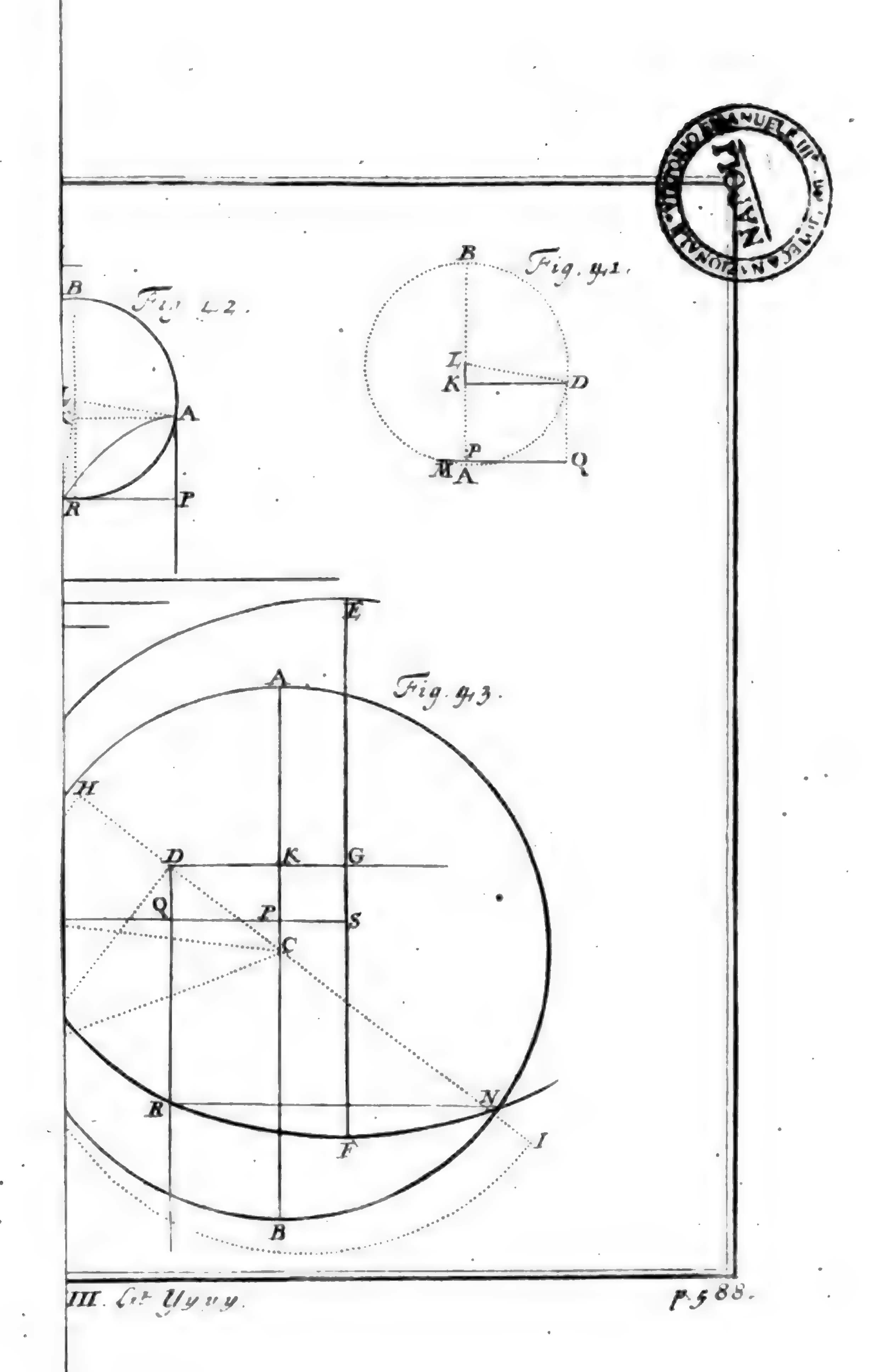


Fig. 41.
B
L
K
D
P
M
A
Q
Fig. 42.
B
A
R
P
Fig. 43.
E
A
H
D
K
G
Q
P
S
C
R
N
F
I
B

Donc $\overline{MC}^2 = \overline{LC}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PC}^2$.

$\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 + af = y^2 + cy + \frac{1}{4}c^2 + x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 + bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb.$

$$y^2 + x^2 + cy - ax + bx = af$$

$$x^2 = af + ax - bx - y^2 - cy$$

Donc $af - \frac{by^2}{a} - cy = af + ax - bx - y^2 - cy$

$$bx - ax = \frac{by^2}{a} - y^2.$$

$b - a$

$$x = y^2 : a.$$

$$x^2 = y^4 : a^2 = af - \frac{by^2}{a} - cy$$

a^2

$$y^4 = a^3 f - aby^2 - a^2 cy$$

$$y^4 + aby^2 + a^2 cy = a^3 f.$$

Autre exemple. Soit l'Equation quarro-quarrée $y^4 + aby^2 - a^2 cy = - a^3 f$, à construire. On fera encore

$$a : y = y : x$$

Donc

I.° $yy = ax$. à la Parabole

& par conséquent $x = y^2 : a$.

La valeur de y^2 étant ſubſtituée dans la propoſée, on aura :

$$a^2x^2 + aby^2 - a^2cy = -a^3f.$$

$$ab \overline{\qquad\qquad}$$

II°. $\frac{ax^2}{b} + y^2 - \frac{ac}{b}y = -\frac{a^2}{b}f.$ à l'Ellipſe

On aura encore $a^2x^2 + a^2bx = a^2cy - a^3f$

$$a^2 \overline{\qquad\qquad}$$

III°. $x^2 + bx = cy - af.$ à la Parabole.

$$ax = y^2$$

IV.° $x^2 + bx + ax = y^2 + cy - af.$ à l'Hyp. équil.

$$ax = y^2$$

$$x^2 + bx = cy - af.$$

V.° $ax - x^2 - bx = y^2 - cy + af.$ au Cercle.

Voici la conſtruction par le moyen du Cercle & de l'Hyperbole, en combinant le 5. & le 4. Lieu. Fig. 44.

La 5. Equation étant tranſpoſée & comparée à l'Equation generale au Cercle, vous donnera

$\frac{g}{f} = 0$ $\quad 2l = c.$ $\quad -2i = b - a$ $\quad l^2 + i^2 - \frac{1}{4}d^2 = af.$

$l = \frac{1}{2}c$ $\quad 2i = a - b$

$b = f$ $\quad i = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$

$l^2 = \frac{1}{4}c^2$ $\quad i^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2.$

Ainsi pour construire ce Cercle soit AK $= \frac{1}{2} c$, KC $= \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b$. Donc CA $= \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{2} ab + \frac{1}{4} b^2 + \frac{1}{4} c^2}$ de plus AH $= a$, AI $= f$, AL, ou AG sera $\sqrt{af}$, par conséq. GC, ou MC $= \sqrt{\frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{2} ab + \frac{1}{4} b^2 - af} = \frac{1}{2} d$.

La 4. Equation étant transposée & comparée à l'Equation generale à l'Hyperbole équilatere nous donnera :

$$\frac{g}{f} = 0 \qquad f = b \qquad \frac{-2l = c}{l = -\frac{1}{2} c} \qquad \frac{+2i = -a - b}{i = -\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b}$$

$$l^2 = \frac{1}{4} c^2 \qquad i^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} ab + \frac{1}{4} b^2$$

$$\frac{l^2 - i^2 \pm \frac{1}{4} d^2 = -af}{\frac{1}{4} d^2 = i^2 - l^2 - af}$$

Et pour la moitié de l'axe $\sqrt{\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} ab + \frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{4} c^2 - + af} = \frac{1}{2} d$. Pour construire cette Hyperbole soit AF $= \frac{1}{2} c$. FO $= \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b$, & OQ $= \sqrt{\frac{1}{4} c^2 - \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{2} ab - \frac{1}{4} b^2 + af}$. Le point Q sera le sommet & le point O, le centre de l'Hyperbole équilatere à décrire, qui coupera le Cercle au point M, & la ligne PM sera la racine vraie de l'Equation proposée. Car CR=AK—PM$= \frac{1}{2} c - y$. RM=AP—KC$= x - \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b$.
MS=MP+PS$= y + \frac{1}{2} c$. SO=SF+FO$= x + \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b$.
SO^2—OQ^2=MS^2 &c.

II. On trouve une regle generale pour construire toutes les Equations tant Cubiques que Quarro-quarrées, que l'on appelle aussi la regle Centrale, de la maniere suivante : Soit une Parabole; si du point H, comme centre & du *Fig.* 45.

rayon HA on décrit un Cercle qui coupe la Parabole aux points N, N, M, nommant AD$=b$. DH$=d$. AQ$=c$. on aura $\overline{AH}^2 = dd + bb$. Soit de plus le parametre de la Parabole $= a$, PM$= x$.

on aura : OM $= x + c$. RM $= x + d$. puisque

$$\begin{array}{l} OM + AQ. \quad PM \quad AP \\ a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a} \end{array}$$

On aura DP $=$ HR $= \frac{x^2 + 2cx}{a} - b$. donc $\overline{HR}^2 =$

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + b^2$$

Et $\overline{RM}^2 = x^2 + 2dx + d^2$

$$\text{Donc } \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + b^2 + x^2 + 2dx + d^2 = b^2 + d^2$$
$$\qquad - b^2 \qquad\qquad - d^2 - b^2 - d^2$$

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{4bcx}{a} = 0$$
$$\qquad - \frac{2bx^2}{a} + 2dx$$
$$\qquad + x^2$$

$$\frac{x}{a^2}$$

$$x^3 + 4cx^2 + 4c^2x - 4abc = 0$$
$$\qquad - 2abx + 2a^2d$$
$$\qquad + a^2x$$

D'où

D'où on voit que lorſque le ſecond terme eſt poſitif, les racines vraies tombent vers la droite. Soit donc l'Equation generale à comparer

$$x^3 + px^2 \mp qx \mp r = 0$$

Nous aurons $4c = p$

$$c = \frac{1}{4}p.$$

$$4c^2 - 2ab + a^2 = q \qquad \text{ou} \qquad 4c^2 - 2ab + a^2 = -q$$

$$4c^2 + a^2 - q = 2ab \qquad\qquad 4c^2 + a^2 + q = 2ab$$

$$\frac{4}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab \qquad\qquad \frac{4}{16}p^2 + a^2 + q = 2ab$$

$2a$ $\qquad\qquad$ $2a$

$$\frac{p^2}{8a} + \frac{1}{2}a - \frac{q}{2a} = b. \qquad\qquad \frac{p^2}{8a} + \frac{1}{2}a + \frac{q}{2a} = b.$$

quant au dernier terme $\mp r$. on aura :

$$2a^2d - 4abc = r \qquad\qquad 2a^2d - 4abc = -r$$

$$2a^2d = r + 4abc \quad \text{ou} \quad 2a^2d = 4abc - r$$

$2a^2$ $\qquad\qquad$ $2a^2$

$$d = \frac{r}{2a^2} + \frac{2bc}{a} \qquad\qquad d = \frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2}$$

$$d = \frac{r}{2a^2} + \frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} \qquad d = \frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2}$$

Soit à présent $PN = x$, & le reste comme cy-dessus ; on aura $NR = PN - RP = PN - DH = x - d$. $NO = x - c$. $Pm = x - 2c$.

Puisque $a : ON + AQ = Pm : AP$

$$a : x = x - 2c : \frac{x^2 - 2cx}{a}$$

L'operation faite comme cy-dessus, on aura :

$$\begin{aligned} x^3 - 4cx^2 + 4c^2x + 4abc &= 0 \\ - 2abx - 2a^2d & \\ + a^2x & \end{aligned}$$

D'où il est évident que les racines vraies tombent vers la gauche, lorsque le second terme est négatif. Soit donc l'équation generale à comparer

$$x^3 - px^2 \mp qx \mp r = 0.$$

On trouvera les valeurs de b, de même que cy-dessus. Mais à cause de la contrarieté des signes, on trouvera celle de d.

au cas de $+ r$. & au cas de $- r$.

$$\tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2} = d \qquad \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} = 0$$

Ainsi on aura dans les Equations Cubiques, où il ne manque point de terme :

$AQ = \frac{1}{4} p.$

$DA = \frac{1}{2} a + \frac{p^2}{8a} \pm \frac{q}{2a}$

$DH = \frac{1}{4} p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} \mp \frac{r}{2a^2}.$

C'est-à-dire q, ou le coëfficient du troisiéme terme est toujours affecté du signe contraire à celui qu'il a dans l'Equation; & on a $-r$, lorsque p & r sont affectés de signes contraires; sans cela on a toujours $+r$. Et puisque les coëfficiens des termes qui s'évanoüissent sont $=0$, il est évident que la regle peut aussi être appliquée aux Equations où il manque quelque terme.

Enfin si le quarré du rayon MH ou HN $= b^2 + d^2 \pm af$ l'Equation restera quarro-quarrée. Ainsi l'Equation à comparer étant

$$x^4 \mp px^3 \mp qx^2 \mp rx \mp s = 0$$

le reste se trouvant comme cy-dessus, on aura:

$$s = a^3 f \text{ ou } s : a^3 = f.$$

Ce qui fera trouver le rayon du Cercle suivant que l'on aura $+s$ ou $-s$, selon ce que nous avons déja montré; & par conséquent cette même regle centrale pourra aussi servir pour la construction des Equations quarro-quarrées.

Cette regle est avantageuse en ce que l'on n'est point obligé de faire évanoüir le second terme de l'Equation proposée; & de plus si le Parametre de la Parabole est

$a = 1$, on n'aura plus dans les Equations de b & d, cet a, & ses puissances.

Mais il est évident en même tems qu'il y a plus de facilité à construire une Parabole, dont le Parametre soit $= a$, pour la solution du Problême proposé, que si on se servoit d'une Parabole décrite quelconque.

III. Voici encore quelques Problêmes, dont la construction la plus simple se doit faire par les Lieux que nous avons montré cy-dessus.

I. Problême. Trouver entre deux lignes données les deux moyennes proportionelles de suite.

Soit la plus grande des données $= b$, la plus petite $= a$, la plus petite de celles que l'on cherche $= y$, la plus grande $= x$, on aura par les conditions du Problême:

$a : y = y : x$ $\qquad$ $y : x = x : b$

I. $ax = y^2$ à la Parabole. $\qquad$ II. $x^2 = by$. à la Parabole.

$ax = y^2$

$a : y = x : b$ $\qquad$ III. $x^2 - ax = by - y^2$. au Cercle

IV. $xy = ab$. à l'Hyperbole entre les Asymptotes.

$$ax = y^2$$
$$x^2 = by$$

V. $x^2 + ax = y^2 + by$, à l'Hyperbole équilatere.

Si $b = 2a$, la queſtion ſe reduit au celebre Problême de la duplication du Cube; & alors y ſera le côté du Cube double de celui de a. Et géneralement pour faire un Cube multiple d'un autre donné, ſoit $ma^3 = y^3$. Ainſi cherchant entre a & ma, les deux moyennes proportionelles, la moindre ſera $= y$.

II. Problême. Une ligne droite AB étant diviſée comme on voudra en C, il s'agit de la diviſer en D, enſorte que $CD : DB = \overline{AC}^2 : \overline{CD}^2$. Soit $AC = a$, $CB = b$, $Cd = y$, $DB = b - y$. Fig. 46.

Donc $y : b - y = a^2 : y^2$

$$y^3 = a^2 b - a^2 y.$$

Pour introduire une nouvelle indéterminée

ſoit $a : y = y : x$

I.° $ax = y^2$. à la Parabole.

$$y : b - y = aa : ax$$
$$a : x$$

II.° $xy = ab - ay$. à l'Hyperbole entre les Aſymptotes

$$y : b - y = a : x$$
$$y^2 : by - y^2 = a : x$$
$$ax : by - y^2 = a : x$$
$$x : by - y^2 = 1 : x$$

III.° $x^2 = by - y^2$, au Cercle. Enfin I.° $ax = y^2$

$ax = y^2$ III°. $x^2 = by - y^2$

IV.° $x^2 + ax = by$ à la Parab. VI. $ax - x^2 = 2y^2 - by$, à l'Ellip.

$ax = y^2$

V°. $x^2 + 2ax = by + y^2$. à l'Hyperbole équilatere

III. Problême. Faire un Cube égal à un Parallelepipede donné. Soient les côtés du Parallepipede a, b, c, le côté du Cube y, on aura $abc = y^3$ pour introduire une nouvelle indéterminée.

Soit $a : y = y : x$

I.° $ax = y^2$, à la Parabole.

$a : y = ax : bc$.

II.° $xy = bc$, à l'Hyperbole entre les Asymptotes.

$y : x = ax : bc$.

III.° $x^2 = bcy : a$, à la Parabole.

$ax = y^2$

IV.° $x^2 - ax = \frac{bcy}{a} - y^2$ au Cercle.

V.° $x^2 + ax = y^2 + \frac{bcy}{a}$ à l'Hyperbole équilatere.

Enfin $x^2 = bcy : a$

$2ax = 2y^2.$

VI.° $2ax - x^2 = 2y^2 - bcy : a$, à l'Ellipſe.

VII.° $2ax + x^2 = 2y^2 + bcy : a$, à l'Hyperbole ſcalene.

IV. Problême. Diviſer un angle donné ACB, en trois également. Fig. 47.

Suppoſé la choſe faite, ſoient les trois cordes égales AE, ED, DB, ainſi nommant $AC = b$, $AB = a$, $AE = y$, $EG = x$.

On aura les deux triangles AEG, CAE, ſemblables ; puiſque la meſure de l'angle EAG, eſt l'arc DB, & celle de l'angle ACE eſt l'arc AE, qu'on ſuppoſe = DB, & l'angle AEC leur eſt commun, & par conſéquent.

AC : AE = AE : EG. AC : EC = AE : AG.

$b : y = y : x$

Mais AC = EC. AE = AG.

I.° $yy = bx$, à la Parabole

Qu'on ſuppoſe à préſent la ligne EF, parallele à CD, on aura les angles EFH, DHB. GHC, EDC, égaux, de même que les angles EGF, HGC, CED.

Donc EC : ED = EG : GF

$b : y = x : \frac{xy}{b}$

Et puiſque les lignes DB, ED, AE, ſont égales, & que DB = BH, AE = AG & ED = FH. On aura AE + ED + DB = AG + BH + GH + GF, c'eſt-à-dire 3 AE = AB + FG, par conſéquent

$$3y = a + \frac{xy}{b}$$

II.° $3by = ab + xy$, ou $3by - xy = ab$, à l'Hyperbole entre les Aſymptotes.

Cette Equation ſe reſoud dans l'analogie ſuivante

$$b : y = 3b - x : a$$
$$y : x = 3b - x : a$$

III.° $ay = 3bx - x^2$ à la Parabole.
$yy = bx$

IV.° $ay + y^2 = 4bx - x^2$ au Cercle.
$ay = 3bx - x^2$
$y^2 = bx$

V.° $ay - yy = 2bx - x^2$ à l'Hyperbole équilatere.
$ay = 3bx - x^2$
$2yy = 2bx$

VI.° $2y^2 + ay = 5bx - x^2$ à l'Ellipſe.

ay

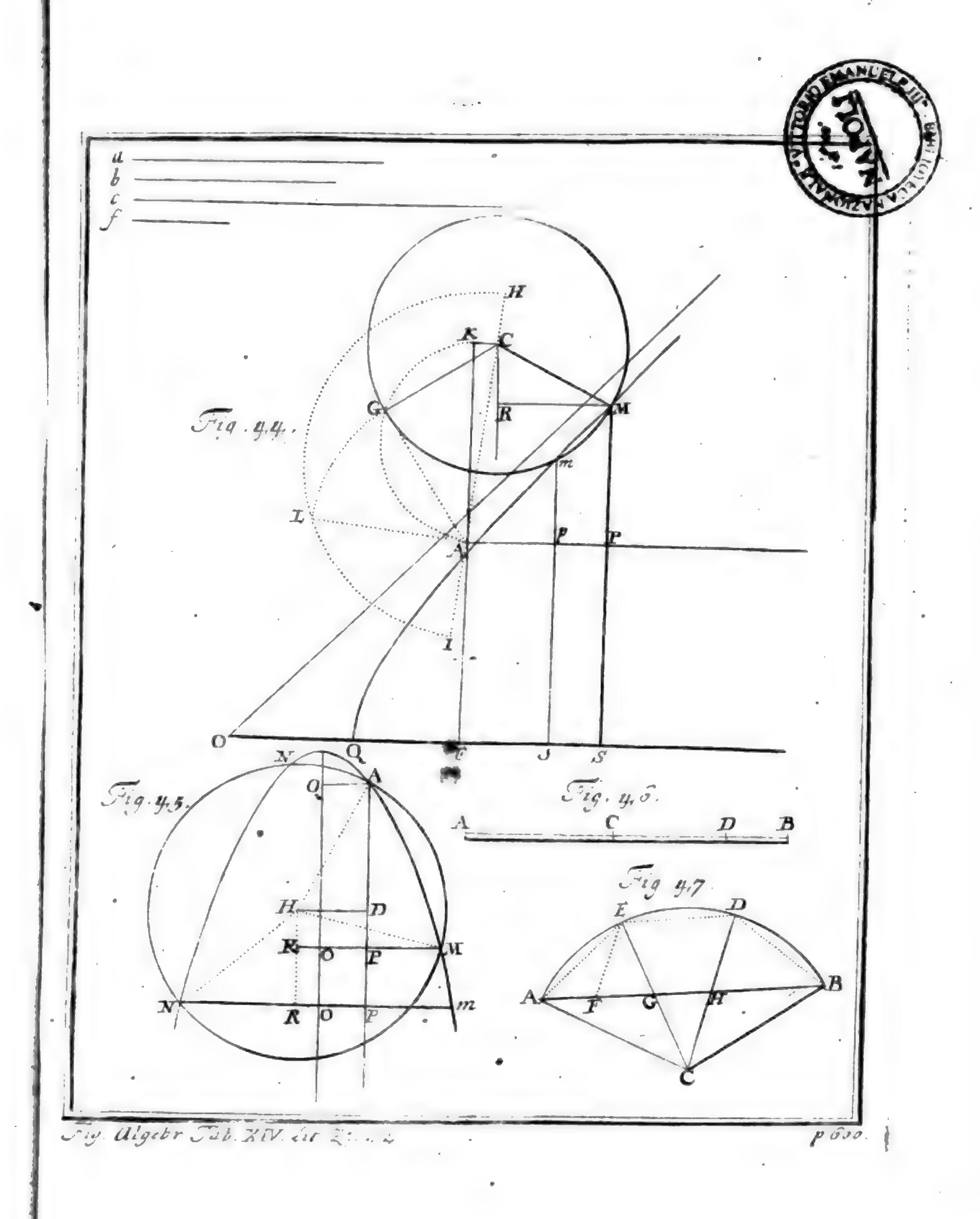


Fig. Algebr Tab. XIV. &c

p 600.

Et puiſque les lignes DB, ED, AE, ſont égales, & que DB = BH, AE = AG & ED = FH. On aura AE + ED + DB = AG + BH + GH + GF, c'eſt-à-dire 3 AE = AB + FG, par conſéquent

$$3y = a + \frac{xy}{b}$$

II.° $3by = ab + xy$, ou $3by - xy = ab$, à l'Hyperbole entre les Aſymptotes.

Cette Equation ſe reſoud dans l'analogie ſuivante

$$b : y = 3b - x : a$$
$$y : x = 3b - x : a$$

III.° $ay = 3bx - x^2$ à la Parabole.
$yy = bx$

IV.° $ay + y^2 = 4bx - x^2$ au Cercle.
$ay = 3bx - x^2$
$y^2 = bx$

V.° $ay - yy = 2bx - x^2$ à l'Hyperbole équilatere.
$ay = 3bx - x^2$
$2yy = 2bx$

VI.° $2y^2 + ay = 5bx - x^2$ à l'Ellipſe.

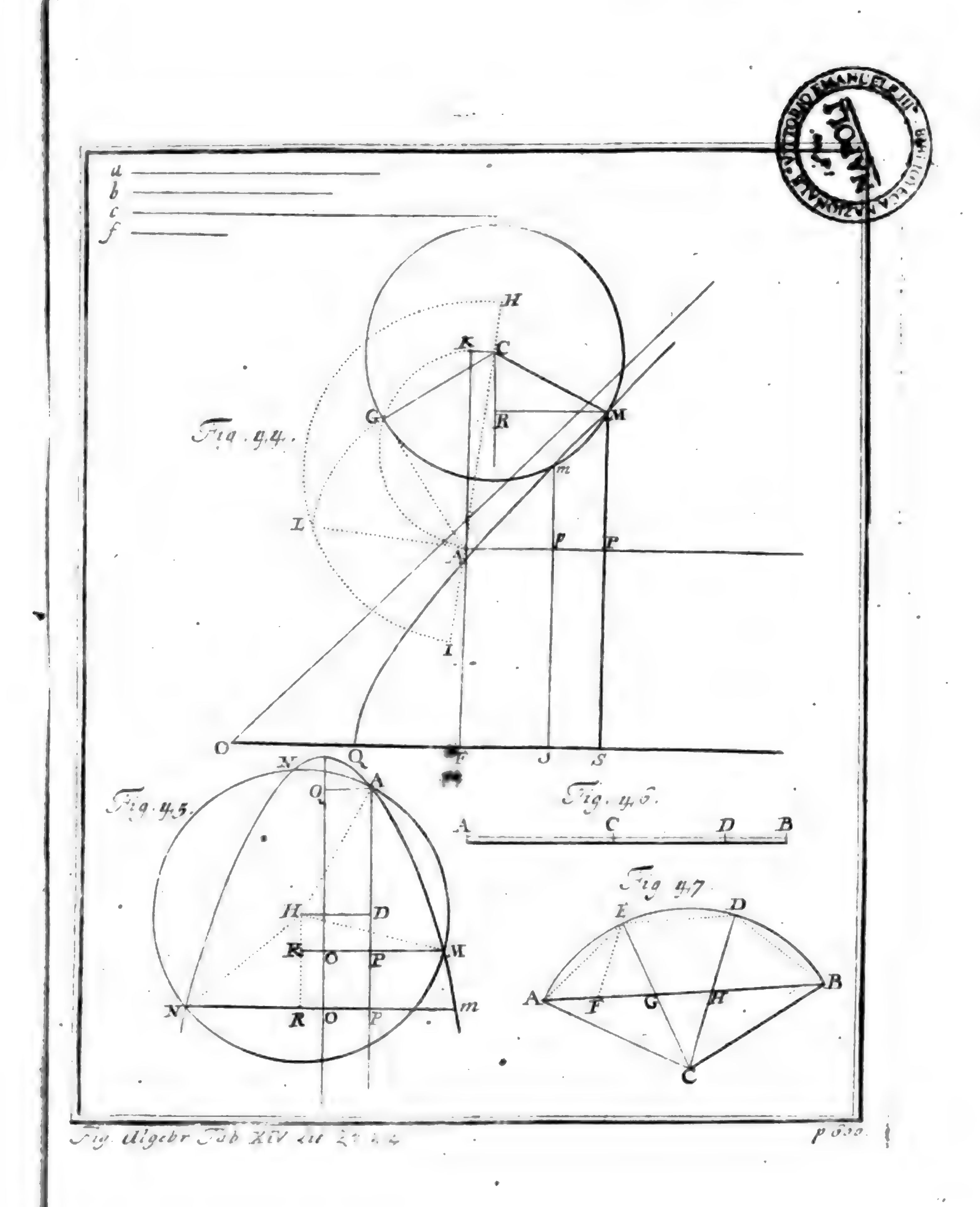
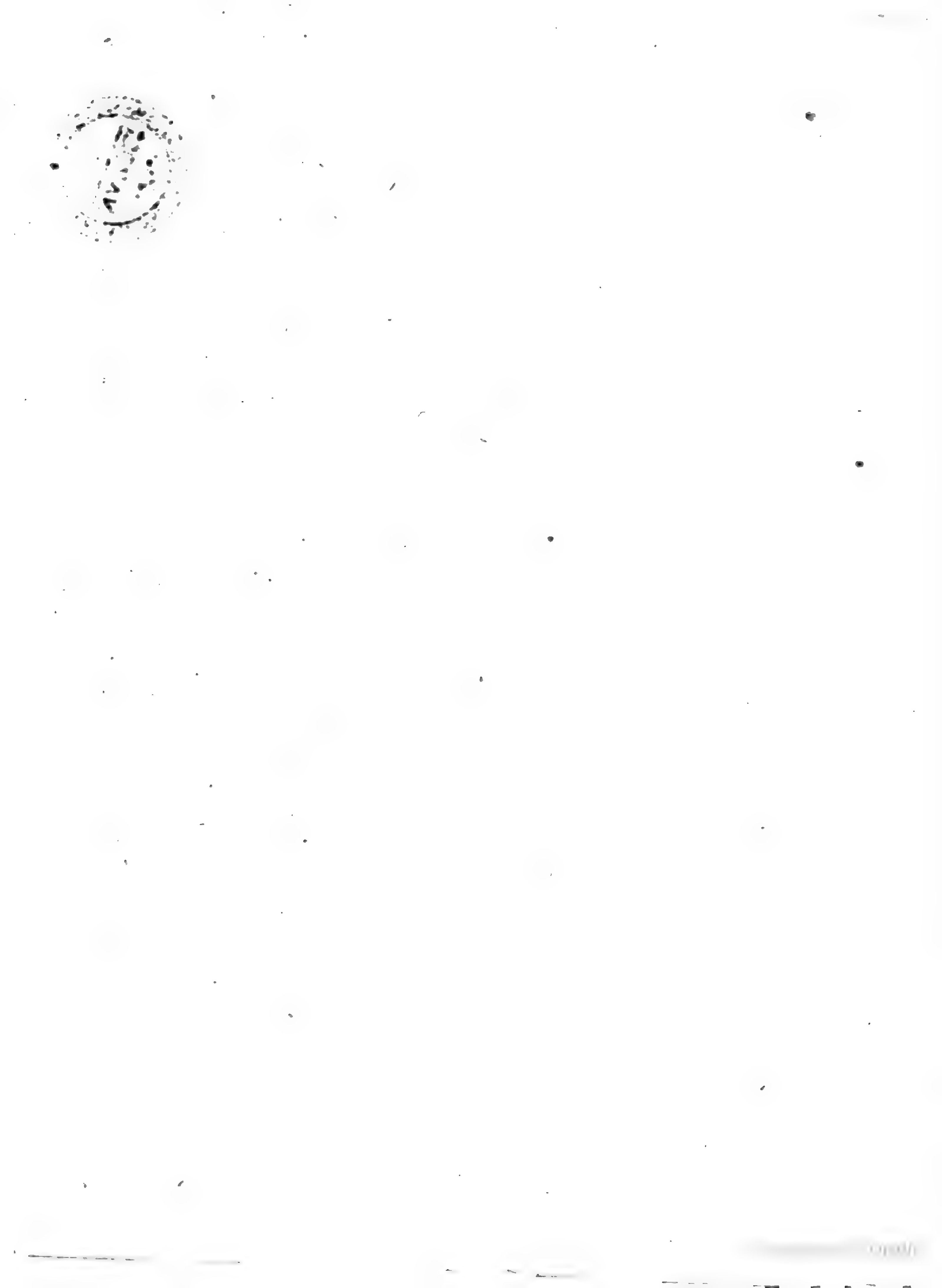


Fig. Algebr. Tab. XIV zu

p 6



$\bar{a}y = 3bx - x^2$

$2yy = 2bx$

VII.* $ay - 2y^2 = bx - x^2$, à l'Hyperbole scalene.

V. Problême. Exprimer un nombre irrationel par une ligne. Soit par exemple une ligne $= a$, il s'agit d'en trouver une autre y, ensorte que

$$a : y = 1 : \sqrt[3]{5}$$

$$a\sqrt[3]{5} = y$$

$$5a^3 = y^3$$

Il est évident qu'en cherchant entre $\bar{a}$, & $5\bar{a}$, les deux moyennes proportionelles, la premiere sera la ligne cherchée y.

On a omis de remarquer cy-dessus pag. 566. l 16. que si la Courbe, dont il y est parlé, est continuée au dedans du Cercle, elle y fait un *folium*; & qu'elle a un nœud au point C.

SECONDE PARTIE.

De l'Analyse des infiniment Petits.

PREMIERE SECTION.

Du Calcul differentiel.

CHAPITRE PREMIER.

De la nature de ce Calcul.

I. SI on considere une grandeur variable, on peut concevoir que son accroissement ou son décroissement se fait par parties si petites, qu'elles n'ont aucun rapport avec la grandeur entiere ; & une telle petite partie s'appelle la Differentielle. De sorte que la grandeur entiere conçûë avec cette differentielle, ne differre pas de cette même grandeur conçûë sans cette differentielle. Ainsi on pourroit concevoir qu'un grain de sable plus ou moins ne fait de difference sensible à la hauteur d'une montagne ; que la hauteur d'une montagne n'en fait pas de sensible par rapport au diametre de la Terre ; & même que le diametre de la Terre n'en fait point par rapport à la grande distance des étoiles fixes, &c.

II. Les grandeurs constantes n'augmentant ni ne diminuant point, elles n'ont point par conséquent de differentielles. Ces grandeurs constantes se nomment par les premieres lettres de l'Alphabet au lieu que les variables se marquent par les dernieres comme x, y, z, & leurs differentielles se marquent par la lettre d, posée immé-

Digitized by Google

diatement devant la lettre de la grandeur variable comme dx, dy, dz. Ainsi il eſt aiſé de trouver les differentielles des grandeurs ſimples, qui ne ſont jointes que par addition ou ſouſtraction, comme $d\ (x + y - a) = dx + dy$, $d\ (x - y + a) = dx - dy$.

III. Si deux grandeurs changeantes ſe multiplient, on trouve la differentielle du produit en multipliant chaque facteur par la differentielle de l'autre. Comme xy a pour differentielle $x\,dy + y\,dx$. Car ſuppoſant un rectangle dont un côté eſt $x + dx$, l'autre $y + dy$, le produit donnera $xy + y\,dx + x\,dy + dx\,dy$, dont ôtant xy, produit des deux grandeurs conçûës ſans differentielles, & ôtant auſſi $dx\,dy$, qui ne peut être une grandeur differentielle, à moins que l'un ou l'autre de ſes coëfficiens ne ſoit pris pour une grandeur conſtante, il reſtera $y\,dx + x\,dy$. Cecy eſt encore plus évident par la difference de $\overline{x + \frac{1}{2}dx} \times \overline{y + \frac{1}{2}dy}$ & de $\overline{x - \frac{1}{2}dx} \times \overline{y - \frac{1}{2}dy}$.

Si trois grandeurs variables ſe multiplient, la differentielle du produit ſe trouve en multipliant la differentielle de chacune par le produit des deux autres. On en voit aiſément la raiſon par la ſubſtitution; ſoit xyz, ſuppoſant $xy = t$, on aura $xyz = tz$, & $d\,(tz) = t\,dz + z\,dt$, mais $dt = x\,dy + y\,dx$. Donc $d\,(xyz) = xy\,dz + zx\,dy + zy\,dx$. S'il y en a quatre comme $uxyz$, la differentielle ſera $uxy\,dz + uxz\,dy + uyz\,dx + xyz\,du$, & ainſi des autres. Ainſi $d\,(x^2) = 2x\,dx$, $d\,(x^3) = 3x\,x\,dx$. Et géneralement $d\,(x^m) = mx^{m-1}\,dx$. Si l'une des variables croît pendant que l'autre décroît, on aura la $d\,(xy) = y\,dx - x\,dy$.

IV. Les exposans des puissances x^1, x^2, x^3, x^4, &c. sont en même tems leurs Logarithmes, supposé que le Logarithme de l'unité soit o. Par conséquent si les puissances vont en diminuant depuis l'unité comme $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{x^3}$ $\frac{1}{x^4}$ &c. on les pourra marquer par un exposant négatif comme $x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}$, & géneralement $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$.

Pour trouver les differentielles de ces sortes de puissances décroissantes de même que celles des irrationelles, nous ferons les operations génerales sur les trois formules suivantes $1 : x^m$. $\sqrt[m]{x^n}$. & $1 : \sqrt[m]{x^n}$. par la substitution; & pour plus grande évidence nous mettrons à côté de chaque operation génerale une particuliere.

Soit donc $1 : x^m = v$ | $1 : x^3 = v$

$$1 = x^m v \qquad\qquad 1 = x^3 v$$

$$o = mx^{m-1} v dx + x^m dv \qquad\qquad o = 3x^2 v dx + x^3 dv$$

$$-mx^{m-1} v dx = x^m dv. \qquad\qquad -3x^2 v dx = x^3 dv$$

$$\frac{-mx^{m-1} v dx}{x^m} = dv \qquad\qquad \frac{-3x^2 v dx}{x^3} = dv.$$

$$\frac{-mx^{m-1} dx}{x^{2m}} = dv \qquad\qquad \frac{-3x^2 dx}{x^6} = dv$$

$$-mx^{-m-1} dx = dv \qquad\qquad -3x^{-4} dx = dv$$

Soit $\sqrt[m]{x^n} = y = x^{n:m}$

$x^n = y^m$

$n x^{n-1} dx = m y^{m-1} dy$

$n x^{n-1} dx = \frac{m y^m}{y} dy$

$n y x^{n-1} dx = m y^m dy$

$\frac{n y x^{n-1} dx}{m y^m} = dy$

$\frac{n x^{\overline{n:m}+\overline{n-1}} dx}{m x^n} = dy.$

$\frac{n}{m} x^{n:m-1} dx = dy.$

$\frac{n}{m} x^{(n-m):m} dx = dy.$

$\sqrt[2]{x^3} = y = x^{3:2}$

$x^3 = y^2$

$3 x^2 dx = 2 y dy$

$3 x^2 dx = \frac{2 y^2}{y} dy$

$3 y x^2 dx = 2 y^2 dy$

$\frac{3 y x^2 dx}{2 y^2} = dy$

$\frac{3 x^{3:2} x^2 dx}{2 x^3} = dy$

$\frac{3}{2} x^{\overline{3:2}-1} dx = dy$

$\frac{3}{2} x^{\overline{3:2}} x^{-2:2} dx = dy$

$\frac{3}{2} x^{1:2} dx = dy$

$\frac{2}{3} \sqrt[2]{x^3} = y = \frac{2}{3} x^{3:2}$

$\sqrt[2]{x^3} = \frac{3}{2} y$

$x^3 = \frac{9}{4} y^2. \mid 2 x^3 = 4\frac{1}{2} y^2.$

$3 x^2 dx = 4\frac{1}{2} y dy = \frac{4\frac{1}{2} y^2}{y} dy$

$\frac{3 y x^2 dx}{4\frac{1}{2} y^2} = dy$

$\frac{2 x^{\overline{3:2}+2} dx}{2 x^3} = dy$

$x^{\overline{3:2}-1} dx = dy$

$x^{1:2} dx = dy$

$\int x^{1:2} dx = \frac{2}{3} \sqrt[2]{x^3}.$

Soit $1 : \sqrt[m]{x^n} = z = 1 : x^{n:m}$

$1 = z \sqrt[m]{x^n} = z x^{n:m}$

$0 = \frac{n}{m} x^{(n-m):m} z dx + x^{n:m} dz$

$1 : \sqrt[2]{x^3} = z = 1 : x^{3:2}$

$1 : z \sqrt[2]{x^3} = z x^{3:2}$

$0 = \frac{3}{2} x^{1:2} z dx + x^{3:2} dz$

$-\frac{n}{m}x^{(n-m):m}z\,dx = x^{n:m}dz$ $-\frac{3}{2}x^{1:2}z\,dx = x^{3:2}dz$

$\frac{-nx^{(n-m):m}dx}{mx^{n:m}} = x^{n:m}dz$ $\frac{-3x^{1:2}dx}{2x^{3:2}} = x^{3:2}dz$

$\frac{-nx^{(n-m):m}dx}{mx^{2n:m}} = dz$ $\frac{-3x^{1:2}dx}{2x^{6:2}} = dz$

$-\frac{n}{m}x^{(-n-m):m}dx = dz$ $\frac{3}{2}x^{-5:2}dx = dz$

$\frac{-n\,dx}{m\sqrt[m]{x^{n+m}}} = dz$ $\frac{-3\,dx}{2\sqrt[2]{x^5}} = dz$

On voit aiſément que ces formules fourniſſent des regles génerales.

V. Pour trouver la differentielle, lorſque les grandeurs variables ſe diviſent

Soit $x : y = u$

$x = uy$

$dx = u\,dy + y\,du$

$dx - u\,dy = y\,du$

$dx - \frac{x\,dy}{y} = y\,du.$

$\frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2} = du$

$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = du$

D'où on tire pour regle génerale, que le produit de la differentielle du dividende par le diviseur, moins le produit de la differentielle du diviseur par le dividende, divisé par le quarré du diviseur, donne la differentielle du quotient ou de la division. On trouvera de même la differentielle de $xy : uz = uzxdy + uzydx - xyudz - xyzdu : u^2 z^2$. La differentielle de $9a^6 : x^2 = -18a^6xdx : x^4$.

CHAPITRE SECOND.

De l'usage du Calcul Differentiel, pour déterminer les Tangentes des Courbes.

I. SOit une Courbe Algebrique quelconque AMO, & sa Tangente TMQ, dans laquelle AP étant l'abscisse, PM la demi-ordonnée, si on conçoit une autre demi-ordonnée *pm*, infiniment proche de la premiere, P*p* sera la differentielle de l'abscisse, & ayant fait MR parallele & égale à P*p*, R*m* sera la differentielle de la demi ordonnée. Or dans cette supposition le petit Arc M*m*, pouvant être pris pour une ligne droite & comme faisant partie de la Tangente TQ, si AP est l'axe de la Courbe, on aura le petit triangle M*m*R, qui s'appelle le triangle caracteristique de la Courbe, rectangle & semblable au triangle TMP; ainsi pour déterminer la Soutangente on pourra inferer que Fig. 48.

$$Rm : MR = PM : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Et ſubſtituant dans cette valeur de PT, celle de dx, tirée de l'Equation de la Courbe, toutes les grandeurs differentielles s'évanoüiſſent, & la valeur de la Soutangente ſe préſente en grandenrs ordinaires ou entieres.

II. Par exemple l'Equation de la Parabole

ordinaire étant $ax = y^2$

La differentielle ſera $adx = 2ydy$.

$$dx = 2ydy : a$$

Donc $PT = ydx : dy = 2y^2dy : ady = 2y^2 : a = 2ax : \bar{a} = 2x$.

Soit la Courbe propoſée un Cercle, dont l'Equation eſt

$$ax - xx = y^2$$

Diff. $adx - 2xdx = 2ydy$

$$dx = 2ydy : \overline{a - 2x}$$

Donc $PT = ydx : dy = 2y^2dy : \overline{a - 2x}, dy = 2y^2 : \overline{a - 2x} = \overline{ax - x^2} : \overline{\tfrac{1}{2}a - x}$

Fig. 49. Donc PC : PB = AP : PT, ou PC : PA = CA : AT

à cauſe de $\frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x} - x = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a - x}$.

Soit la Courbe propoſée une Ellipſe ordinaire, on ſçait que ſon Equation eſt

ay^2

$$ay^2 = abx - bx^2$$

Diff. $$2aydy = abdx - 2bxdx$$

$$2aydy : \overline{ab - 2bx} = dx$$

Donc $PT = ydx : dy = 2ay^2 : \overline{ab - 2bx} = \overline{2abx - 2bx^2} : \overline{ab - 2bx} = \overline{2ax - 2x^2} : \overline{a - 2x}$. Prennant l'Abſciſſe depuis le Centre, on aura dans le Cercle & dans l'Ellipſe $PT = \frac{a^2 - x^2}{x}$

Soit la Courbe une Hyperbole ordinaire ; on a ſon Equation.

$$ay^2 = abx + bxx$$

Diff. $$2aydy = abdx + 2bxdx$$

$$2aydy : \overline{ab + 2bx} = dx$$

Donc $PT = ydx : dy = 2ay^2 : \overline{ab + 2bx} = \overline{2ax + 2x^2} : \overline{a + 2x}$. On y peut auſſi prendre l'Abſciſſe depuis le Centre, ce qui donnera

$$PT = \frac{x^2 - \frac{1}{4}a^2}{x}.$$

Que ce ſoit l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes ;

ſon Equation eſt ,

$$xy = aa$$

Diff. $$xdy + ydx = 0$$

$$ydx = -xdy :$$

$PT = ydx ; dy = -xdy : dy = x$

Il est évident qu'il la faut prendre de l'autre côté de l'Abscisse AP. On voit que x allant en augmentant, y va en diminuant, ainsi la differentielle devoit être $ydx - xdy$.

L'Equation de la Cissoïde est

$$y^2 = x^3 : \overline{a - x}$$

Diff. $$2ydy = \overline{3ax^2dx - 3x^3dx + x^3dx} : \overline{a - x}^2$$

$$2y, \overline{a - x}^2, dy : \overline{3ax^2 - 2x^3} = dx$$

PT $= ydx : dy = 2y^2, \overline{a - x}^2 : \overline{3ax^2 - 2x^3} = 2x^3, \overline{a - x} : \overline{3ax^2 - 2x^3} = \overline{2ax - 2x^2} : \overline{3a - 2x}$.

III. Puisque PT $= ydx : dy$, PM $= y$, on aura TM $= \sqrt{y^2dx^2 : dy^2 + y^2} = y\sqrt{dx^2 + dy^2} : dy$

Fig. 48. IV. Pour déterminer la Souperpendiculaire PH dans une Courbe Algebrique, les mêmes dénominations étant supposées comme cy-dessus, on aura :

$$PT : PM = PM : PH$$

$$\frac{ydx}{dy} : y = y : \frac{ydy}{dx}$$

Ainsi substituant dans cette valeur generale de PH, celle de dy, tirée de l'Equation d'une Courbe proposée les grandeurs differentielles s'évanoüissent, & la valeur

de la Souperpendiculaire se presente dans des grandeurs ordinaires. Ainsi dans la Parabole ordinaire y ayant $dy = adx : 2y$ on aura :

$$PH = ydy : dx = aydx : 2ydx = \tfrac{1}{2}a.$$

Dans le Cercle y ayant $adx - 2xdx = 2ydy$. On aura $PC = ydy : dx = \tfrac{1}{2}a - x$.

Dans l'Hyperbole entre les Asymptotes, on a $dy = -ydy : x$, Donc $PH = ydy : dx = -y^2 : x$.

Dans la Cissoïde $2ydy = \overline{3ax^2dx - 2x^3dx} : \overline{a - x}^2$

Donc on y trouve $ydy : dx = \overline{3ax^2 - 2x^3} : \overline{2(a-x)^2}$

V. La Souperpendiculaire PH, étant $= ydy : dx$. La demi ordonnée $PM = y$: on aura la Perpendiculaire $MH = \sqrt{y^2dy^2 : dx^2 + y^2} = y\sqrt{dy^2 + dx^2} : dx$.

VI. L'Equation de la Conchoïde étant trop ample, on tomberoit à une expression très-ennuïante en cherchant sa Soutangente & sa Souperpendiculaire selon la Methode précedente. Ainsi on pourra se servir de celle qui suit :

Soit $AP = x$, $PM = y$, $Pp = dx$, $Rm = dy$. Fig. 50.

Donc $PT = ydx : dy$. Soit de plus $AB = QM = a$. $CM = z$. $BC = b$. $PB = a - x$. $PC = a + b - x$. Pour trouver la valeur de dx, soit

$$\frac{a - x = u}{-dx = du} \qquad \frac{a + b - x = t}{-dx = dt}$$

$$PB : MQ = PC : MC$$
$$u : a = t : z$$

$$at = uz$$

$$adt = zdu + udz$$

De plus $\overline{MC}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{PM}^2.$
$$z^2 = t^2 + y^2.$$

$zdz = tdt + ydy$, & substituant les valeurs des differentielles dt & du, tirées des deux premieres Equations on aura :

$$-adx = -zdx + udz$$

$$zdx - adx = udz$$

$$\frac{zdx - adx}{u} = dz.$$

$$zdz = -tdx + ydy$$

$$dz = \frac{-tdx + ydy}{z}$$

Donc
$$\frac{zdx - adx}{u} = \frac{-tdx + ydy}{z}$$

$$z^2dx - azdx = -utdx + uydy$$

$$z^2dx - azdx + utdx = uydy$$

$$dx = \frac{uydy}{z^2 - az + ut.}$$

Donc la Soutangente $PT = ydx : dy = uy^2 : z^2 - az + ut$, & la Souperpendiculaire $ydy : dx = z^2 - az + tu : u = t + (z^2 - az : u)$

VII. Pour déterminer la Soutangente dans la Spirale d'Archimede, soit le rayon du Cercle $= a$, la circonference $= b$, l'arc BD $= x$ AG $= y$. Qu'on suppose le rayon AC infiniment proche de AD; si du rayon AG on décrit le petit arc EG, on aura CD $= dx$, & EF $= dy$. Fig. 51.

Donc AD : AG $=$ DC : EG.

$$a : y = dx : \frac{ydx}{a}$$

Soit à présent la Soutangente HA, perpendiculaire à AG ou AE, à cause de l'angle EAG, infiniment petit, ce qui sera encore AG $=$ AF, & on aura:

FE : EG $=$ FA, ou GA : AH

$$dy : \frac{ydx}{a} = y \qquad : \frac{y^2 dx}{a\,dy}$$

Mais dans la Spirale d'Archimede $ax = by$.

Donc $adx = b\,dy$, par conséquent AH $= \frac{y^2 dx}{a\,dy} = by^2 : a^2 = xy : a$. D'où on voit que la détermination de cette Soutangente dépend de la rectification du Cercle, puis qu'il faut prendre l'arc x, pour une ligne droite.

VIII. Pour déterminer la Soutangente PT, dans la Cycloïde. Soit APB, le Cercle génerateur de la Cycloïde AMC. KP, la Tangente du Cercle. TM, la Tangente de la Cycloïde. TP sera la Soutangente. Supposant qm, parallele & infiniment proche à la ligne droite QM, qui passe par les deux points d'attouchement P & M, Fig. 52.

soient les Perpendiculaires PO, MS, & enfin MR parallele à PT. On aura MS = PO, & l'angle MRS = P*po*, à cause que l'arc P*p* infiniment petit peut-être pris pour une partie de la droite *p*T. Soit à présent l'arc AP $=x$, PM $=y$. Donc P*p* = MR $=dx$, *m*R $=dy$ on aura les deux triangles M*m* R, MPT, semblables, & par conséquent *m*R : RM = MP : PT. Mais puisque dans

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

la Cycloïde $y = x$, on aura aussi $dy = dx$, & ainsi PT $= y$.

Fig. 53. IX. Pour déterminer la Soutangente PT, dans la Logarithmique ; soit AP $=x$, PM $=y$, & son infiniment proche *pm*, on aura MR = P*p* $=dx$, *m*R $=dy$, & par conséquent *m*R : RM = MP : PT

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Soit une autre Abscisse plus grande ou plus petite que AP $=u$, & son ordonnée correspondante $=z$. La Soutangente sera $=zdu : dz$, & puisque dans la Logarithmique les Abscisses sont en progression Arithmetique, on aura $dx = du$, & les ordonnées y, étant en progression Geometrique, on aura :

$$y : y + dy = z : z + dz.$$

$$y : dy = z : dz$$
$$dx \qquad du$$

$ydx : dy = zdu : dz$. Ce qui fait voir que

dans la Logarithmique toutes les Soutangentes sont égales, & qu'ainsi PT est constante.

X. Un angle rectiligne tel que QTH étant donné, on y pourra décrire telle Courbe Algebrique qu'on voudra qui touche la droite QT dans un point donné M. Car si du point M on abaisse sur TH, la Perpendiculaire MP, cette Perpendiculaire sera la demi-ordonnée, & TP la Soutangente de la Courbe à construire. Soit donc $TP = u$, $PM = y$, on aura, eû égard au triangle Charactéristique, *Fig.* 48.

$$TP : PM = MR : Rm.$$

$$u : y = dx : dy$$

$u\,dy = y\,dx$. Ainsi substituant dans cette Equation la valeur de dy, ou celle de dx, tirée de l'Equation de la Courbe à décrire, on trouvera l'Abscisse x, correspondante à la demi-ordonnée PM, & on aura par conséquent le Sommet A, de la Courbe & les autres lignes qu'il faut pour la décrire. En tout cas s'il arrive que quelqu'une de ces lignes ne se trouve pas déterminée par là, ce sera une marque qu'on pourra prendre une telle ligne à volonté, & que par conséquent dans ce cas plusieurs lignes Courbes de la même espece peuvent satisfaire à ce qui étoit proposé. Soit par exemple la Courbe à décrire une Parabole ordinaire, dont l'Equation est

$$ax = y^2$$

$$a\,dx = 2y\,dy$$

$$dx = 2y\,dy . a$$

Donc

$$u\,dy = 2y^2\,dy : a$$

$$au = 2y^2 = 2ax$$

$$u = 2x.$$

CHAPITRE TROISIE'ME.

De l'usage du Calcul differentiel dans la Methode des plus grands & des moindres.

I. Lorsque les demi-ordonnées d'une Courbe vont en augmentant jusquà un certain point lequel passé elles vont en diminuant ou au contraire, la Methode pour déterminer la plus grande ou la plus petite de ces demi-ordonnées s'appelle la Methode des plus grands & des moindres. Puisque dans une Courbe qui a un plus grand ou un moindre, la Tangente TM, degenere enfin en DE & dévient parallele à l'axe il est évident que dans ce cas
Fig. 54. 55. la Perpendiculaire MH, tombe sur la plus grande ou sur la moindre appliquée CG. Ce qui fait que la Soutangente TP devient infinie, & la Souperpendiculaire PH $=0$. Or PH étant $=ydy:dx=0$, on aura $dy=0$, & à cause de PT $=ydx:dy=\infty$, $dx=\infty$.

Fig. 56.

Il arrive quelques fois que la Tangente HG se rencontre directement avec l'appliquée GC. Dans ce cas la Soutangente $=0$, & la Souperpendiculaire $=\infty$. Mais PT $=ydx:dy=0$, donne $dx=0$, & à cause de PH $=ydy:dx=\infty$ $dy=\infty$. C'est-à-dire tant dx, que y sont infiniment petits par rapport à dy. Il faut tirer de l'Equation de la Courbe la valeur de $dy=0$ ou ∞, pour avoir la valeur de l'Abscisse qui a la plus grande appliquée pour sa demi-ordonnée. Par exemple dans le Cercle on a

$$ax - xx = yy$$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$\frac{1}{2}a - x = \frac{ydy}{dx} = 0.$$

$\frac{1}{2}a = x$. Donc la plus grande appliquée dans le Cercle sé'leve du Centre, & ſubſtituant la valeur de x, dans $ax - xx = y^2$. on aura:

$$\frac{1}{4}a^2 = y^2. \text{ ou } \frac{1}{2}a = y.$$

Dans l'Ellipſe on a $ay^2 = abx - bx^2$

$$2aydy = abdx - 2bxdx$$

$$ydy = \frac{1}{2}bdx - \frac{b}{a}xdx$$

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2}b - \overline{bx : a} = 0$$

$$\frac{1}{2}a = x$$

Donc $ay^2 = \frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{4}a^2b$

$$y^2 = \frac{1}{4}ab.$$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{4}ab}.$$

Oooo

Fig. 57. II. Si du Point R donné sur l'axe AX, d'une Courbe Algebrique on doit tirer à la Courbe la ligne droite MR, qui soit la plus courte qui puisse y être tirée de ce point là; on nommera AP $= x$, PM $= y$, AR $= c$. Donc PR $= c - x$, & à cause de $\overline{PM}^2 + \overline{PR}^2 = \overline{MR}^2$. on aura $\overline{MR}^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2$. Concevant donc une Courbe dont l'appliquée soit MR, on aura :

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = z^2.$$

$$-2cdx + 2xdx + 2ydy = 2zdz = 0$$

$$ydy + xdx - cdx = 0$$

Ainsi substituant la valeur de ydy, qu'on trouve par l'Equation de la Courbe, on pourra déterminer la valeur de x, par exemple dans la Parabole

$$\tfrac{1}{2}adx = ydy.$$

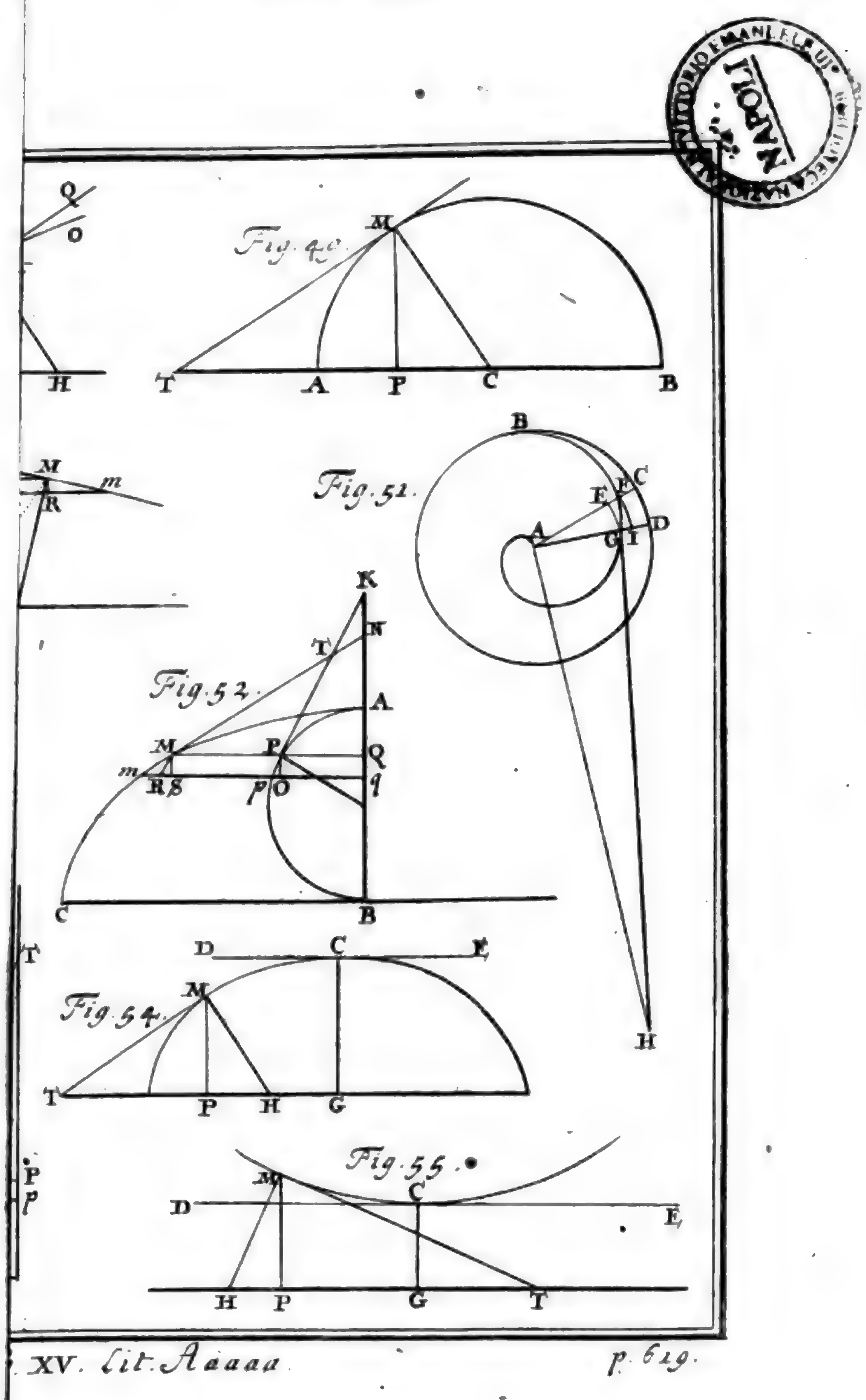
$$\tfrac{1}{2}adx + xdx - cdx = 0$$

$$x = c - \tfrac{1}{2}a. \text{ \&c.}$$

Dans l'Hyperbole équilatere $ax + x^2 = y^2$, donne $x = \frac{1}{2}c - \frac{1}{4}a$. Dans l'Ellipse ordinaire on trouve $x = \overline{ac - \frac{1}{2}ab} : a - b$.

Dans l'Hyperbole scaléne $x = ac - \frac{1}{2}ab : a + b$

Fig. 58. Si ce point est donné hors de la Courbe comme C, & qu'il s'agisse de déterminer sur la Courbe le point où tombe la plus petite; on connoît d'abord la ligne CD,



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

perpendiculaire à l'axe, & la partie de l'axe AD. Soit donc $AD = p$, $CD = q$, $AP = x$, $PM = y$. Donc $MH = AP - AD = x - p$, & $CH = CD - PM = q - y$. $\overline{MC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HM}^2 = q^2 - 2qy + y^2 + x^2 - 2px + p^2$. Or MC étant un moindre, on aura sa differentielle $= o$. c'est-à-dire $-2qdy + 2ydy + 2xdx - 2pdx = \overline{y-q},\ dy + \overline{x-p},\ dx = o$, Le reste se pourra faire comme cy-dessus; par exemple, la Courbe étant une Parabole ordinaire, on aura :

$$ax = y^2$$

$$adx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : a.$$

Donc $\overline{y - q + \overline{x-p},\ 2y : a} = o$

$$ay - aq + 2xy - 2py = o$$

$$ay - aq + 2y^3 : a - 2py = o$$

$$aay - aaq + 2y^3 - 2apy = o$$

$$y^3 + \tfrac{1}{2}a^2 y - \tfrac{1}{2}aaq = o$$
$$- apy$$

Si cette Equation se construit par le moyen de la Parabole donnée & du Cercle, on aura en même tems AP & PM, & le point M.

III. Lorſqu'on veut ſe ſervir de cette méthode pour déterminer d'autres quantités, qui vont en augmentant ou en diminuant juſqu'à un certain terme, on les repréſente ordinairement par des demi-ordonnées de quelque Courbe. Voici des exemples. 1. Couper une ligne droite donnée AB au point D, enſorte que le rectangle compris ſous les parties AD, DB, ſoit le plus grand qu'il eſt poſſible; nommant pour cet effet $AB = a$, $AD = x$, $DB = a - x$; on aura $ax - xx$ un plus grand; donc ſa differentielle $= 0$.

Fig. 58. b. Cette Fig. & les 2. ſuivantes ſont aprés Fig. 27. b.

Soit donc au Cercle

$$ax - xx = yy$$

$$adx - 2xdx = 2ydy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Fig. 58. c. 2.° Soit la droite donnée AB à diviſer en D, enſorte que le ſolide compris ſous $\overline{AD}^2 \times DB$ ſoit le plus grand, on aura $\overline{AD}^2 = x^2$, $BD = a - x$.

Ainſi $ax^2 - x^3$ eſt le ſolide qu'on cherche. *Donc*

ſa differ. $2axdx - 3x^2dx = 0$

$$\tfrac{2}{3}a = x.$$

Fig. 58. d. 3.° Décrire ſur une ligne donnée AB, comme hypotenuſe, le plus grand triangle rectangle poſſible. Soit

AB $= a$, AC $= x$; donc BC$=\sqrt{aa - xx}$ & la surface $\frac{1}{2}\ x\sqrt{aa-xx}$; donc

$$x\sqrt{aa - xx} = y^2$$

$$aaxx - x^4 = y^4$$

$$2a^2xdx - 4x^3dx = 4y^3dy = 0$$

$$2a^2x = 4x^3$$

$$2a^2 = 4x^2$$

$$\frac{1}{2}a^2 = x^2$$

Par conséquent ce triangle sera Isoscele. On sçait d'ailleurs qu'il doit être dans un demi-cercle. Ainsi on voit que le quarré est le plus grand quadrilatere, qui puisse être inscrit dans un cercle.

4.° Soit un demi-cercle ADB, il s'agit de trouver sur le diametre AB un point C, ensorte que AC x CD, soit un plus grand; nommant AB $= a$, AC $= x$; on aura CD $= \sqrt{ax-xx}$. Fig. 59.

Donc $x\sqrt{ax - xx} = \sqrt{ax^3 - x^4} = y^2$

$$ax^3 - x^4 = y^4$$

$$3ax^2dx - 4x^3dx = 4y^3dy = 0$$

$$3ax^2 = 4x^3$$

$$\frac{3}{4}a = x$$

On connoît aiſément qu'en ce cas DB eſt de 60°. Donc le triangle ADC eſt le plus grand de tous ceux qui ſont conſtruits de même façon dans le demi-cercle, autant dans l'autre demi-cercle. Donc le triangle équilateral eſt le plus grand de tous ceux que l'on peut inſcrire au cercle.

Fig. 60. 5.° Soit une Maſſe donnée a^3 que l'on veut mettre dans un coffre de baſe quarrée qui ait le moins de ſurface; on ſuppoſe que le coffre ne ſoit point couvert en haut, en ce cas diviſant a^3 par la baſe x^2 la hauteur AB ſera $= \frac{a^3}{x^2}$ laquelle multipliée par le contour de la baſe $4x$ donne $\frac{4a^3}{x}$ pour la ſurface des quatre côtés; à quoi ajoutant la ſurface de la baſe x^2, on aura $x^2 + \frac{4a^3}{x}$ qui ſera un moindre

la differ. $$2xdx - \frac{4a^3dx}{x^2} = 2ydy = 0$$

$$2x^3 - 4a^3 = 0$$

$x^3 = 2a^3$ d'où on voit encore que le côté de la baſe eſt double de la hauteur. Mais ſi on ſuppoſe ce coffre fermé par en haut, on aura pour toute la ſurface extérieure

$$2x^2 + \frac{4a^3}{x}$$

Diff.

$$4x\,dx - \frac{4a^3\,dx}{x^2}$$

$$4x^3 = 4a^3$$

$$x = a$$

Par conſéqúent le cube eſt le parallelepipede qui contient le plus de ſolide ſous le moins de ſurface.

Si dans le premier cas le vaſe doit être cylindrique, ſuppoſé le rayon de la baſe $= x$, & la raiſon du rayon à la circonference $r:p$, on trouvera $x^3 = 2a^3 r:p$, ou $x = a\sqrt[3]{\frac{2r}{p}}$

6.° Trouver entre tous les Cônes, qui peuvent être inſcrits dans une Sphere donnée, celui qui a la plus grande ſurface convexe. Soit le diametre de la Sphere donnée AB $= a$, l'abſciſſe AC $= x$, on ſçait que cette ſurface ſe forme par la révolution du point D de la ligne AD ſur un Cercle, dont le rayon eſt la ligne DC. L'autre extrémité A de ladite ligne demeurant fixe. Ainſi on aura DC $= \sqrt{ax - x^2}$ & à cauſe de $r:p = \sqrt{ax - x^2}$ La circonference dudit cercle $\frac{p}{r}\sqrt{ax - x^2}$, outre cela à cauſe de $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$ ou BAC, on aura AD $= \sqrt{ax}$; donc la ſurface convexe ſera $\frac{p}{r}\sqrt{ax - x^2} \times \sqrt{ax}$ Fig. 61.

$= \frac{p}{r}\sqrt{a^2x^2 - ax^3}$. Ce qui étant un plus grand on aura:

$$\sqrt{a^2x^2 - ax^3} = y$$

$$a^2x^2 - ax^3 = y^2$$

$$2a^2xdx - 3ax^2dx = 2ydy$$

$$2a^2x - 3ax^2 = \frac{2ydy}{dx} = 0$$

$$2a = 3x$$

$$\frac{2}{3}a = x$$

On trouve aussi que le même Cône est le plus grand en masse de tous ceux, qui peuvent être inscrits dans la Sphere; car sa solidité sera $\frac{p}{r}\sqrt{ax - x^2} \times \frac{1}{2}\sqrt{ax - x^2} \times \frac{x}{3} = \frac{p}{6r}\overline{ax^2 - x^3}$ en prenant $ax^2 - x^3$ pour un plus grand on aura

$$ax^2 - x^3 = y^2$$

$$2axdx - 3x^2dx = 2ydy = 0$$

$$2a = 3x$$

La perpendiculaire qui tombe en ce cas du point C sur AD est aussi un *Maximum*.

7.° Décrire dans un Cercle donné un parallelogramme, dont la base multipliée par le quarré de la hauteur soit un *Maximum*; nommant le diametre $= a$, la base $= x$; la hauteur

la hauteur sera $\sqrt{a^2 - x^2}$. Donc

$$a^2 x - x^3 = y^2$$

$$a^2 dx - 3x^2 dx = 2y dy = 0$$

$$a^2 = 3x^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3} a^2} = x.$$

C'est là la détermination de la plus grande force des poutres, la surface de leur écarrisage dévant être multipliée par la hauteur, considerée comme un levier, dont le point d'en bas est celui de l'appui, pendant que celui de la rupture est en haut.

VIII. La solidité d'un Cône à construire étant donnée trouver celui qui aura la moindre surface convexe. Soit pour cet effet la solidité donnée $= a^3$, AC $= x$; Fig. 62.

donc $r : p = x : \frac{px}{r}$ = circonference AB & $\frac{px}{r} X \frac{x}{2}$

$\left|\frac{px^2}{2r}\right|$ = à la surface AB $\frac{px^2}{2r}\left|\frac{2r}{px^2} - \frac{a^3}{1}\right|\frac{2a^3r}{px^2} = \frac{1}{3}$CD

Donc CD $= 6a^3r : px^2$. Mais à cause de $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$ on aura

$$\overline{AD}^2 = x^2 + \overline{36a^6r^2 : p^2x^4} = \overline{p^2x^6 + 36a^6r^2 : p^2x^4}$$

$$AD = \sqrt{p^2x^6 + 36a^6r^2} : px^2$$

$\frac{1}{2}$ circonf. $AB = \frac{px}{2r}$

surf. conv. $= \sqrt{p^2x^6 + 36a^6r^2} : 2rx = y$ qui eſt un moindre.

Donc $p^2x^6 + 36a^6r^2 : 4r^2x^2 = \overline{p^2x^4 : 4r^2} + \overline{9a^6 : x^2} = yy$

dont la difference $\overline{p^2x^3dx : r} - \overline{18a^6dx : x^3} = 2ydy = 0.$

$$p^2x^3 : r^2 = 18a^6 : x^3.$$

$$p^2x^6 = 18a^6r^2$$

$$px^3 = 3a^3r\sqrt{2}$$

$$x^3 = 3a^3r\sqrt{2} : p$$

$$x = a\sqrt[3]{3r\sqrt{2} : p}$$

Fig. 63. IX. Trouver le plus grand trapezoide, qui puiſſe être inſcrit dans un demi-cercle. Soit $AC = a$, $DE = x$, $GE = y$, donc $CE = a - y$. On ſçait que $\overline{AC + DE} \times EC$ eſt la ſurface du trapezoide. Et puiſque $\overline{2a - y} \times y = x^2$, on aura $-x^2 = -2ay + y^2$; par conſéquent $\sqrt{a^2 - x^2} = a - y$. Donc la ſurface ſera $\overline{a + x} \times \sqrt{a^2 - x^2}$. Cette ſurface étant un plus grand ſa difference eſt $= 0$.

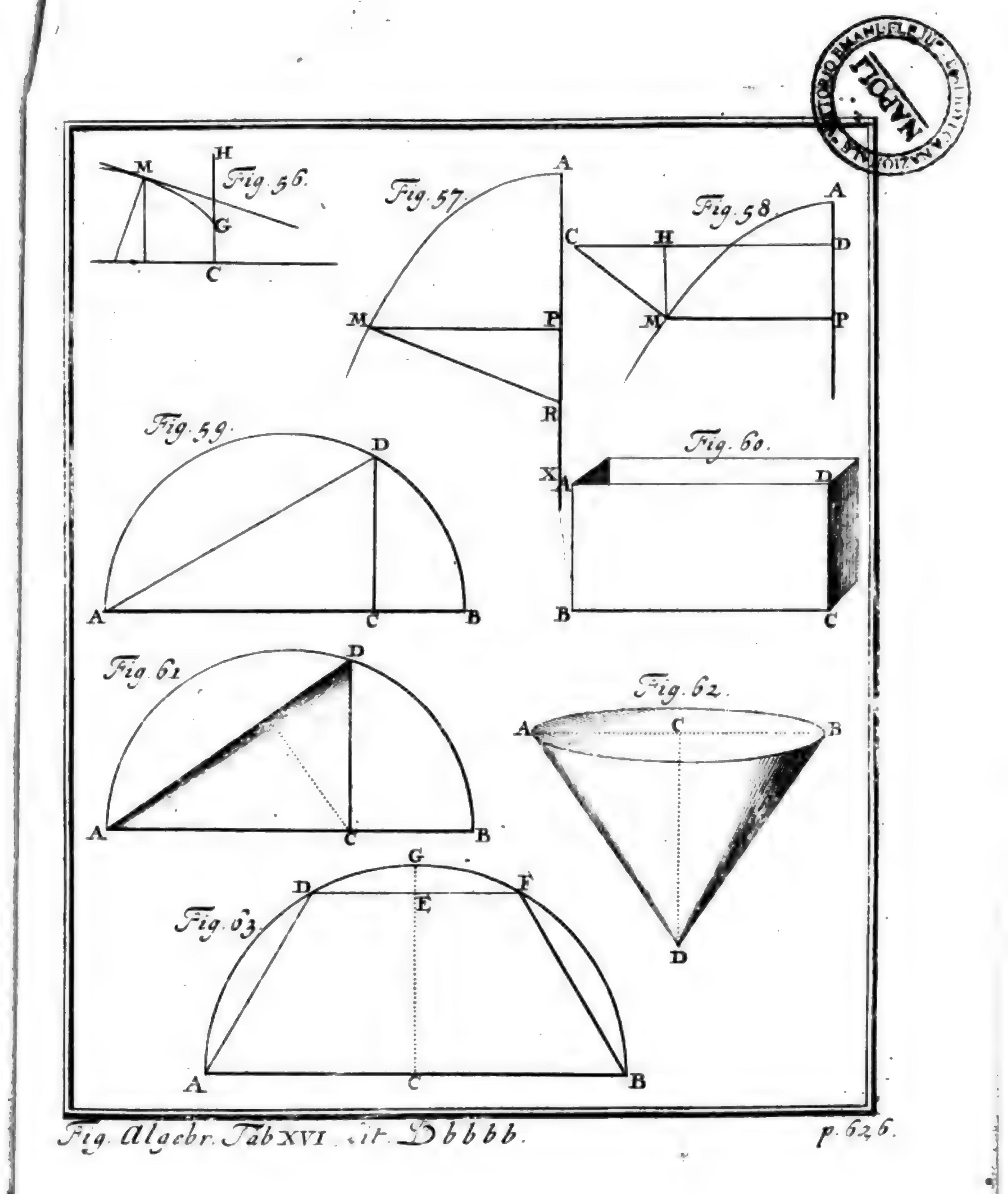
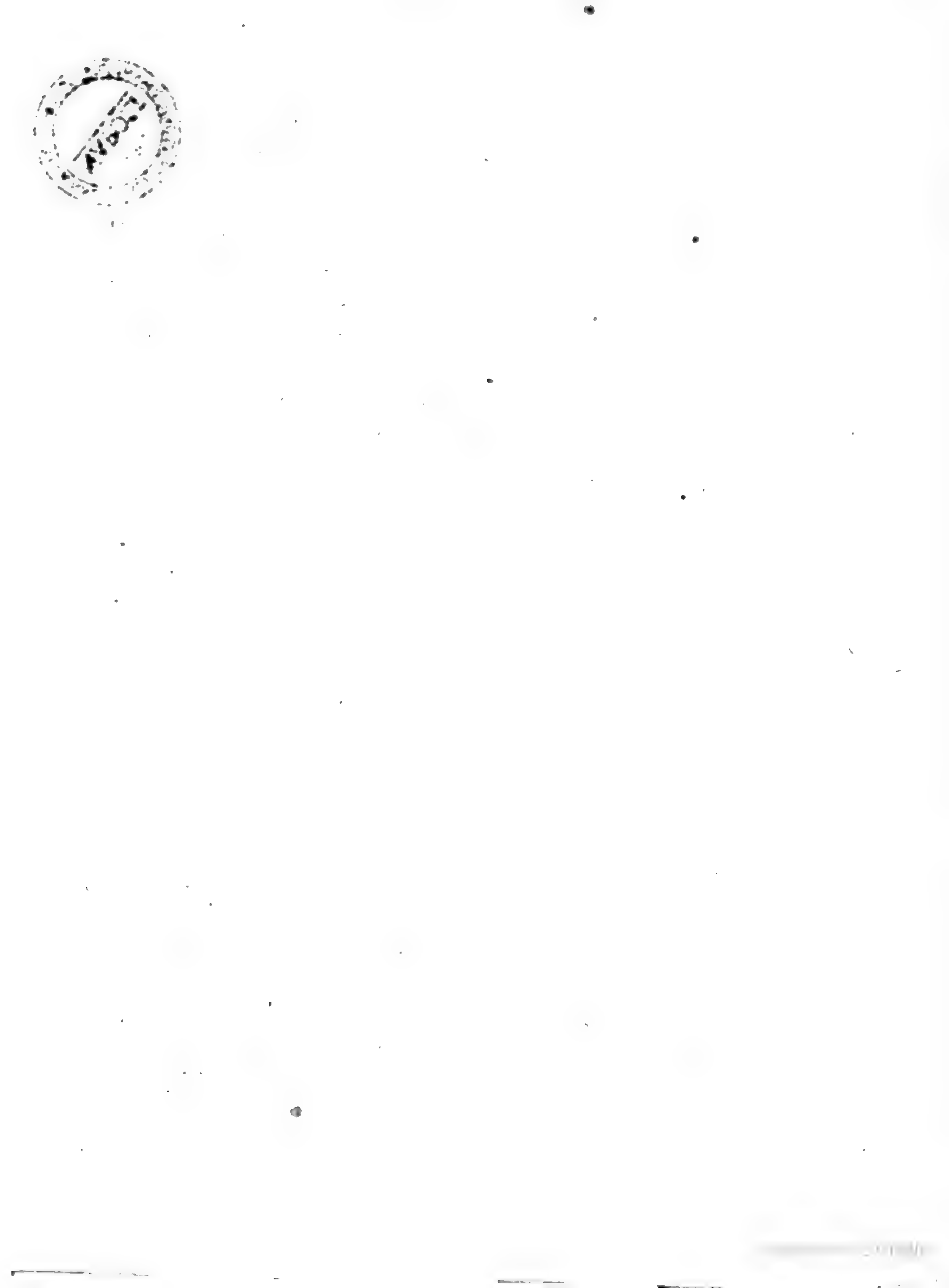


Fig. Algebr. Tab XVI . lit. Dbbbb.   p. 626.



Pour trouver cette difference soit :

$\sqrt{a^2 - x^2} = u$ $\quad a + x \times \sqrt{a^2 - x^2} = au + xu$

$a^2 - x^2 = u^2$ $\quad adu + xdu + udx$ & substituant les valeurs de du & u, on aura

$\dfrac{-xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = du$

$$\frac{a^2dx - axdx - 2x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$$

Donc $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}ax + x^2$

$\frac{1}{16}a^2 \quad \frac{1}{16}a^2$

$$\sqrt{\frac{9}{16}a^2} = \frac{3}{4}a = \frac{1}{4}a + x$$

$$\frac{1}{4}a - \frac{1}{4}a$$

$$\frac{1}{2}a = x$$

L'Exagone régulier est composé de deux tels trapezoïdes ; donc il est le plus grand de tous les autres Exagones inscrits dans le même Cercle.

SECONDE PARTIE

SECONDE SECTION

Du Calcul Integral.

CHAPITRE PREMIER.

De la Nature de ce Calcul.

I.

E calcul intégral eſt une méthode de trouver une grandeur entiere par le moyen de ſa grandeur differentielle qui eſt donné ; ainſi ce calcul n'eſt autre choſe que la méthode inverſe du calcul differentiel. On marque par la lettre S. qui veut dire ſomme, une grandeur differentielle, que l'on conçoit renduë entiere.

Et ſi on rapporte ici ce qui a été dit dans le premier Chapitre de la ſection précedente, on trouvera d'abord que

1. $S.\ dx = x$
2. $S.\ dx \pm dy = x \pm y$
3. $S.\ xdy + ydx = xy$
4. $S.\ mx^{m-1}dx = x^m$

5. S. $\frac{n}{m} x^{\overline{n-m} : m} dx = x^{n:m}$

6. S. $\overline{y\,dx - x\,dy} : y^2 = x : y$, &c.

Parmi ces formules la quatriéme & la cinquiéme se trouvent le plus souvent dans l'usage. On y trouve l'intégrale 1.° en augmentant dans la differentielle donnée l'exposant de la changeante d'une unité. 2.° En divisant ensuite la differentielle par l'exposant de la changeante, ainsi augmentée de l'unité, & multiplié par la difference dx de la changeante x lineaire. Car le quotient sera l'intégrale. Voici des exemples :

S. $a x dx = \frac{a}{2} x^2$

S. $\frac{a}{b} x^2 dx = \frac{a}{3b} x^3$

S $\frac{4x^3\,dx}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{x^4}{\sqrt{a^2-b^2}}$

S. $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} \times x^5 dx = \frac{1}{6} x^6 \times \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$

S. $n a x^{n-1} dx = a x^n$

S. $a x^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1}$

S. $a x^3 dx - b^2 x^2 dx + c^3 y dy - e^4 dx =$
$= \frac{a}{4} x^4 - \frac{b^2}{3} x^3 - \frac{c^3}{2} y^2 - e^4 x$

S. $\frac{\frac{a}{b} x dx - \frac{ee}{a^2-b^2} y dy}{b}^2 = \frac{\frac{a}{2b} x^2 - \frac{ee}{2a^2-2b^2} y^2}{2ab \quad b^2}$

S. $dx \times \overline{a + \frac{b}{c} x}^2 =$ S $dx \times a^2 + \frac{2ab}{c} x + \frac{b^2}{c^2} x^2 =$

$a^2 x + \frac{ab}{c} x^2 + \frac{b^2}{3c^2} x^3$

S. $dx \times \overline{a + cx^3}^2 = a^2 x + \frac{ab}{2} x^4 + \frac{b^2}{7} x^7$

S. $-m x^{-m-1} dx = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ S. $\frac{n}{m} x^{\overline{n-m} : m} dx = x^{n:m}$

S. $x^{1:2} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ S. $-\frac{n}{m} x^{\overline{-n-m} : m} dx = x^{\frac{-n}{m}} = \frac{1}{x^{n:m}}$

III. Lorſqu'on a une grandeur telle que $\frac{1}{2} \times \overline{a^2dx + 2bxdx} \times \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$ dont la premiere partie $\overline{a^2dx + 2bxdx}$, qui eſt appellée hors du ſigne, eſt la differentielle de l'autre partie $\overline{a^2x + bx^2}$ qui eſt ſous le ſigne, mais que l'on conſidere pour ceci ſeulement, comme hors du ſigne; on en trouve toujours l'integrale; comme auſſi quand la differentielle hors du ſigne eſt multipliée par une grandeur conſtante quelconque. La raiſon en eſt aſſez évidente par la ſubſtitution. Soit, par exemple.

$$\overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}} = z$$

$$\overline{a^2x + bx^2} = z^2$$

$$\overline{a^2dx + 2bxdx = 2zdz}$$

$$\frac{1}{2} \times \overline{a^2dx + 2bxdx \times a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}} = z^2dz$$

Mais S. $z^2dz = \frac{1}{3}z^3$; donc S. $z^2dz =$ $\frac{1}{3} \times \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{3}{2}}$

Autre exemple S. $2xdx \times \overline{aa + xx}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \times \overline{aa + xx}^{\frac{3}{2}}$. En cas qu'une telle differentielle ne ſe préſente point dans la forme que l'on vient de dire, il faut l'y réduire. Ce qui ſe fait en multipliant la grandeur qui eſt hors du ſigne & en diviſant celle qui eſt ſous le ſigne, par une même quantité, capable de faire cette réduction, ou au contraire. Mais ſi le ſigne eſt négatif, il faut multiplier

ou diviser de part & d'autre par cette même quantité. La raison de cette operation est que l'on conserve par son moyen la même valeur de la differentielle, laquelle dans le dernier cas est une fraction. Voici des exemples:

$$x,\ \frac{dx \times \overline{aaxx + x^4}^{\frac{1}{2}}}{xdx \times \overline{aa + x^2}^{\frac{1}{2}}} \quad x:] \frac{\overline{3ax^3\,dx + 4x^4\,dx} \times \overline{ax + x^2}^{\frac{1}{2}}}{3ax^2\,dx + 4x^3\,dx \times \overline{ax^3 + x^4}^{\frac{1}{2}}}$$

$$x,\ \frac{\overline{adx + xdx} \times \overline{3a + 2x}^{-\frac{1}{2}}}{\overline{axdx + x^2dx} \times \overline{3ax^2 + 2x^3}^{-\frac{1}{2}}}$$

Le reste s'acheve facilement par la substitution, comme dans le dernier exemple. Soit

$$\overline{3ax^2 + 2x^3}^{-\frac{1}{2}} = z$$

$$\overline{3ax^2 + 2x^3}^{\frac{1}{2}} = z^{-1}$$

$$3ax^2 + 2x^3 = z^{-2}$$

$$6axdx + 6x^2dx = -2z^{-3}dz$$

$$axdx + x^2dx = -\tfrac{1}{3}z^{-3}dz$$

$$\frac{-\tfrac{1}{3}z^{-2}dz = \overline{axdx + x^2dx} \times \overline{3ax^2 + 2x^3}^{-\frac{1}{2}}}{\tfrac{1}{3}z^{-1} = \tfrac{1}{3} \times \overline{3ax^2 + 2x^3}^{\frac{1}{2}}}$$

Autre

Autre exemple.

Soit $a x^2 \, d x \times \overline{a^2 x^2 + x^4}^{-\frac{1}{2}}$

$x :$ |

$a x \, d x \times \overline{a^2 + x^2}^{-\frac{1}{2}}$ dont la S. $= a \times \overline{aa + xx}^{\frac{1}{2}}$

IV. La longueur des methodes, que l'on a pour trouver les intégrales des differentielles binomes, trinomes, &c. ne nous permet point de les mettre ici. On trouvera qu'elles consistent principalement dans la substitution de quelques grandeurs indéterminées, dont on découvre les valeurs; & qu'elles menent la plûpart à des suites infinies. Comme nous avons donné dans la premiere introduction la maniere de former une suite infinie par la division; il nous reste encore à faire voir de quelle maniere l'extraction de la racine peut faire naitre de même une suite infinie.

Pour y venir, il faut réduire la méthode, que nous avons donné pour élever une binome à une puissance quelconque, en une formule génerale. Soit donc $a + b$ à élever à la puissance m. Les termes de cette puissance seront a^m. $a^{m-1} b$. $a^{m-2} b^2$. $a^{m-3} b^3$. $a^{m-4} b^4 - a^{m-5} b^5$, &c. Les onces de ces termes se trouveront par la suite.

$$\frac{m}{1}. \quad \frac{m-1}{2}. \quad \frac{m-2}{3}. \quad \frac{m-3}{4}. \quad \frac{m-4}{5}. \text{ \&c.}$$

de sorte que les termes avec leurs onces se trouveront être

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m}{1}, \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 + \frac{m}{1}, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}$$

$$a^{m-3}b^3 + \frac{m}{1},\frac{m-1}{2},\frac{m-2}{3},\frac{m-3}{4}a^{m-4}b^4, \text{ \&c.}$$

Et puisque $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$ $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$, &c.

On pourra abreger l'expression de cette puissance de la maniere qui suit,

$$a^m + \frac{m}{1}\frac{a^m b}{a} + \frac{m}{1},\frac{m-1}{2}\frac{a^m b^2}{a^2} + \frac{m}{1},\frac{m-1}{2},\frac{m-2}{3}\frac{a^m b^3}{a^3} + \frac{m}{1},$$

$$\frac{m-1}{2},\frac{m-2}{3},\frac{m-3}{4}\frac{a^m b^4}{a^4} \text{ \&c.}$$

Après quoi supposant $a = P$, & $\frac{b}{a} = Q$, l'on aura $a^m = P^m$, & $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$, &c. & les valeurs qui en résultent étant substituées dans la formule précedente, vous aurez celle-ici.

$$P^m + \frac{m}{1}P^m Q + \frac{m}{1},\frac{m-1}{2}P^m Q^2 + \frac{m}{1},\frac{m-1}{2},\frac{m-2}{3}P^m Q^3$$

$$+ \frac{m}{1},\frac{m-1}{2},\frac{m-2}{3},\frac{m-3}{4}P^m Q^4, \text{ \&c.}$$

Après ceci on supposera le premier terme $P^m = A$, le second $= B$, le troisiéme $= C$, &c. & substituant de suite cette valeur de chaque terme précedent dans celui qui le suit immédiatement, on viendra à une formule, dont l'expression sera très abregée, comme on peut voir par ce qui suit :

$$P^m + \frac{m}{1} P^m Q + \frac{m}{1}, \frac{m-1}{2} P^m Q^2 + \frac{m}{1}, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3} P^m Q^3$$
$$+ \frac{m}{1}, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4} P^m Q^4, \text{\&c.}$$

$$P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ +, \text{\&c.}$$

A B C D E

Moyennant cette formule, que l'on peut pouſſer facilement auſſi loin que l'on voudra, on peut élever ſans peine un Binome literal à telle puiſſance déterminée, que l'on voudra en ſubſtituant à la place de P, Q, & *m*, leurs valeurs. On pourroit même s'en ſervir pour extraire telle racine que l'on veut d'un Binome donné. Mais puiſque dans ce cas l'expoſant *m* marque une fraction, qui pourroit embaraſſer dans l'operation, on trouvera plus de facilité en ſubſtituant une autre formule pareille à celle-ci, & dans laquelle l'expoſant s'exprime par une fraction comme *m* : *n*, la voici :

$$P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ +$$

A B C D

$$\frac{m-3n}{4n} DQ +, \text{\&c.}$$

E

Soit, par exemple : $\overline{a^2 + x^2}^{\frac{1}{2}}$, ce qui donnera

$$P = a^2,\ Q = \frac{x^2}{a^2},\ m = 1,\ n = 2$$

Par conſéquent $A = a^{\frac{2}{2}} = a$, $B = \frac{1}{2}\, a \frac{x^2}{a^2} = \frac{x^2}{2a}$.

$$C = \frac{-1}{4}, \frac{x^2}{2a}, \frac{x^2}{a^2} = \frac{-x^2}{8a^3}. \quad D = \frac{-3}{6}, \frac{x^4}{8a^3}, \frac{x^2}{a^2} = \frac{-x^6}{16a^5}.$$

$$E = \frac{-5}{8}, \frac{-x^6}{16a^5}, \frac{x^2}{a^2} = \frac{5x^8}{128a^7},$$ &c. C'eſt à dire,

$$a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} + \frac{5x^8}{128a^7}, \text{ \&c.} = \overline{a^2 + x^2}^{\frac{1}{2}}$$

On verra l'utilité de ceci dans la ſuite, où nous expliquerons l'uſage de ce Calcul Intégral, qui eſt fort ample, puiſqu'on l'employe non ſeulement pour trouver la quadrature des Courbes & leur longueur ou rectification, pour cuber les Solides décrits par des Courbes, & pour trouver les ſurfaces, leurs centres de gravité, & même ceux de percuſſion & d'oſcillation; mais on s'en ſert encore dans la méthode inverſe des Tangentes, & pour la conſtruction des logarithmes, dont nous expliquerons la plus grande partie dans les Chapitres ſuivans, par pluſieurs exemples, afin d'en faire voir l'application.

CHAPITRE SECOND.

De l'Uſage du Calcul Integral pour la Quadrature des Courbes.

Fig. 64. I. ON peut concevoir que l'aire ou la ſurface d'une Courbe eſt compoſée d'un nombre infini de trapezoïdes, tels que PM*mp*, qui ſont compris chacun ſous la differentielle P*p* de l'abſciſſe, & la demi-ordonnée PM ou *pm*. Et puiſque ces deux demi ordonnées ne different que

d'une partie infiniment petite mR, chacun de ces trapezoïdes peut être regardé comme un parallelogramme rectangle PMRp, dont la valeur s'exprimera par ydx, qui est la differentielle ou l'Element de l'aire de la Courbe. Car le petit triangle MR$m = \frac{1}{2}\ dy\,dx$ étant infiniment petit par rapport à cet élement y peut être négligé. Ainsi S. ydx sera l'aire ou la surface que l'on cherche ; dans laquelle substituant la valeur de y en x, tirée de l'équation de la Courbe on aura une differentielle dont l'intégrale donnera l'aire cherchée. Pour voir ceci avec évidence, soit dans le triangle ABC, AD$=a$, BC$=b$, AP $=x$, MN $=y$, Pp $=$ dx, l'analogie Fig. 65.

AP : MN = AD : BC

$x : y = a : b$ donne $y = \frac{bx}{a}$,

Mais le trapezoïde ou rectangle Mn $= ydx = bxdx : a$;

donc S. $ydx = \frac{bx^2}{2a}$ ce qui est la surface indéterminée du triangle AMN, dans laquelle substituant a à la place de x on aura $\frac{ba^2}{2a}$ $\simeq \frac{1}{2}\ ab$ pour la surface du triangle conformément aux élemens.

II. L'équation de la parabole ordinaire étant $ax = y^2$ on aura

$$a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$$

$$ydx = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$S.\ y\,dx = \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}\sqrt[2]{ax^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt[2]{x^2y^2} = \tfrac{2}{3}xy.$$

Donc la ſurface de la Parabole eſt au rectangle de l'Abſciſſe & de l'Ordonnée :: 2 : 3.

Fig. 66. III. Pour trouver la ſurface d'un ſegment de parabole PMNQ, compris entre deux demi-ordonnées; on voit d'abord que les ſurfaces APM & AQN, pouvant être trouvées par le précedent article, on aura pour le ſegment cherché $\frac{2}{3}$ AQ, QN $-\frac{2}{3}$ AP, PM. Mais il faut expedier la queſtion par le calcul, afin de trouver une régle génerale, qui faſſe connoître, ſi une intégrale qu'on a trouvé eſt complete ou non, & ce qu'il faut en ce cas lui ajoûter ou en retrancher, pour la rendre complete. Soit donc 1.° AP conſtante $= b$, l'origine de x au point P, PQ $= x$, QN $= y$, AQ $= b + x$, de plus le Parametre $= a$, on aura :

$$ab + ax = y^2$$

$$\sqrt{ab + ax} = y$$

$$y\,dx = dx\sqrt{ab + ax}$$

Pour rendre cet élement intégrable ſoit :

$$\sqrt{ab + ax} = z$$

$$ab + ax = z^2$$

$$a\,dx = 2z\,dz$$

$$dx = 2z\,dz : a$$

$$y\,dx = 2z^2\,dz : a$$

$$S.\ y\,dx = \tfrac{2}{3} z^3 : a = \tfrac{2}{3} \times \overline{ab + ax} \times \sqrt{\overline{ab + ax}} : a$$
$$= \tfrac{2}{3}\, \overline{b + x} \times \sqrt{\overline{ab + ax}}.$$

Puisqu'au point P, $x = 0$, il eſt évident que l'eſpace QNMP devient $= 0$. Or ſi dans l'integrale on ſubſtituë $x = 0$, il y reſte $\frac{2}{3}\, b \times \sqrt{ab}$, qu'il faut ſouſtraire dans le préſent cas de l'intégrale trouvée, ce qui donnera la ſurface du ſegment QNMP $= \frac{2}{3}\, \overline{b + x} \times \sqrt{\overline{ab + ax}} - \frac{2}{3}\, b \times \sqrt{ab}$

Soit en ſecond lieu AQ conſtante $= b$, l'origine de x au point Q, QP $= x$, PM $= y$, AP $= b - x$, le parametre $= a$

Nous aurons :

$$ab - ax = y^2$$

$$\sqrt{\overline{ab - ax}} = y$$

$$y\,dx = dx\sqrt{\overline{ab - ax}}$$

Soit encore :

$$ab - ax = z^2$$

$$-a\,dx = 2z\,dz$$

$$dx = -2z\,dz : a$$

$$y\,dx = -2z^2\,dz : a.$$

$$S.\ y\,dx = -\tfrac{2}{3} z^3 : a = -\tfrac{2}{3} \times \overline{b - x} \times \sqrt{\overline{ab - ax}} = \tfrac{2}{3} \times \overline{x - b} \times \sqrt{\overline{ab - ax}}.$$

Or x étant ſuppoſé $= 0$ il reſtera dans cette integrale $-\frac{2}{3}\, b \times \sqrt{ab}$, d'où il eſt évident qu'il faut ajouter

Digitized by Google

dans le préſent cas $+ \frac{2}{3} b \sqrt{ab}$, ce qui donnera la ſurface du ſegment QNMP $= \frac{2}{3} \times \overline{x - b} \times \sqrt{ab - ax} + \frac{2}{3} b \sqrt{ab}$ ∽ $-$ APM $+$ AQN $=$ QNMP.

D'où on infere generalement que ſi on n'a que l'équation d'une Courbe ſans qu'elle ſoit décrite, & que par conſequent on ne ſçache point l'origine de x, il faut ſuppoſer la grandeur changeante x, de l'intégrale $= 0$; & ſi après cette ſuppoſition il reſte une conſtante dans l'integrale, il faut la joindre avec un ſigne contraire à l'intégrale qu'on a trouvé, & elle ſera l'integrale complete qu'on cherchoit; par exemple : ſoit l'équation d'une Courbe dont on cherche la ſurface

$$y^2 = x^4 + a^2 x^2$$ Ce qui donnera

$$y = x \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$y\,dx = x\,dx \sqrt{x^2 + a^2}$$

Pour rendre cet élement intégrable ſoit :

$$\sqrt{x^2 + a^2} = z$$

$$x^2 + a^2 = z^2$$

$$2x\,dx = 2z\,dz$$

$$x\,dx = z\,dz$$

$$x\,dx \sqrt{x^2 + a^2} = z^2\,dz$$

S. y

Digitized by Google

$S: y\,dx = \frac{1}{3}z^3 = \overline{x^2+a^2} \times \sqrt{x^2+a^2}$.

Suppoſant $x = o$, il reſtera dans cette intégrale $+\frac{1}{3}a^3$. Donc la quadrature ou l'aire de la Courbe ſera $\frac{1}{3} \times \overline{x^2+a^2}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}a^3$.

IV. Pour trouver la quadrature de l'hyperbole ordinaire entre ſes aſymptotes, on prendra ſon équation $a^2 = by + xy$. Or faiſant $a = b = 1$, ce que l'on peut, puiſque la détermination de la grandeur b eſt arbitraire, on aura :

$$1 = y + xy.$$

$$1 : \overline{1+x} = y$$

Or cette diviſion étant faite actuellement on aura pour quotient :

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6, \text{\&c.}$$

$$y\,dx = dx - x\,dx + x^2\,dx - x^3\,dx + x^4\,dx - x^5\,dx + x^6\,dx, \text{\&c.}$$

$S.\ y\,dx = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7$, &c. à l'infini.

V. Pour la quadrature du Cercle, ſoit le rayon $= 1$, $CP = x$, on aura $y = \sqrt{1-x^2}$. L'extraction de cette racine étant faite ſelon la méthode donnée ci-deſſus on trouvera : Fig. 67.

$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \frac{7}{250}x^{10}$, &c. â l'infini.

Donc $y\,dx = dx - \frac{1}{2}x^2\,dx - \frac{1}{8}x^4\,dx - \frac{1}{16}x^6\,dx - \frac{5}{128}x^8\,dx - \frac{7}{250}x^{10}\,dx$

$S. ydx = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 \;\; \frac{7}{2816}x^{11}$, &c.

Or CP devenant le rayon on aura $x = 1$, l'eſpace DCPM deviendra un quart de cercle, dont la ſurface ſera $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816}$, &c. à l'infini. Cette même ſuite donne la ſurface du Cercle, ſi on ſuppoſe le

Fig. 68. diametre du Cercle $= 1$.

Autrement par la Tangente. Soit la Tangente KB $= x$, BC $= 1$. La Secante CA infiniment proche de l'autre CK, & le petit arc KL décrit du rayon CK. Ce qui donnera AK $= dx$, KC $= \sqrt{1 + x^2}$; & puiſque les angles au point B & L ſont droits, on aura auſſi à cauſe de l'angle infiniment petit KCL, l'angle BKC $=$ KAL.

Donc KC : BC = KA : KL

$$\sqrt{1 + x^2} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$$

De plus CK : KL = CM : mM

$$\sqrt{1 + x^2} : \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad 1 : \frac{dx}{1 + x^2}$$

Par conſéquent la ſurface du ſecteur CMm, $= \frac{1}{2} dx : \overline{1 + x^2}$, & la diviſion étant faite effectivement on trouvera pour quotient la ſuite $\frac{1}{2} X dx - x^2 dx + x^4 dx - x^6 dx + x^8 dx - x^{10} dx$, &c. Dont l'integrale donnera pour le ſecteur BCM, dont la Tangente KB $= x$, la ſuite $\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{18}x^9 - \frac{1}{22}x^{11}$, &c. Donc ſi BM eſt $\frac{1}{8}$ du Cercle la ſurface du ſecteur ſera $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{18} - \frac{1}{22}$, & $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$, pour le quart du Cercle, & cette même ſuite ſera l'aire du Cercle, ſi on ſuppoſe le diametre $= 1$.

Digitized by Google

VI. Si dans l'Ellipse ordinaire on fait AC $= a$, GC$=c$, PC$=x$, on aura $\overline{PM}^2 = y^2 = c^2 \times \overline{a^2 - x^2} : a^2$ Fig. 69.

$$y = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Et extrayant la racine quarrée de $a^2 - x^2$, on aura :

$$a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}, \&c.$$

$$ydx = cdx - \frac{cx^2dx}{2a^2} - \frac{cx^4dx}{8a^4} - \frac{cx^6dx}{16a^6} - \frac{5cx^8dx}{128a^8} - \frac{7cx^{10}dx}{256a^{10}}$$

$$S.\ ydx = cx - \frac{cx^3}{6a^2} - \frac{cx^5}{40a^4} - \frac{cx^7}{112a^6} - \frac{5cx^9}{1152a^8} - \frac{7cx^{11}}{2816a^{10}}, \&c.$$

Lorsque x devient $= a$, on aura pour l'aire du quart de l'Ellipse $ac - \frac{1}{6}ac - \frac{1}{40}ac - \frac{1}{112}ac - \frac{5}{1152}ac - \frac{7}{2816}ac$, ce qui est encore la surface de l'Ellipse entiere si a & c sont le grand & le petit axe, & supposant $\sqrt{ac} = 1$, la surface sera $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816}$, &c. égale à un eCrcle dont le diametre est moyen proportionel entre les axes conjugés de l'Ellipse. Donc l'Ellipse est au Cercle qui a le plus grand axe pour diametre, comme $ac : a^2$ ou $c : a$ du reste on voit que la quadrature de l'Ellipse dépend de celle du Cercle.

VII. Pour la quadrature de la Cycloide on sçait deja que TP = PM ; donc le triangle TPM est Isoscele & l'angle exterieur TPQ double de l'angle M. Mais les deux Fig. 70.

Digitized by Google

angles TPA, APQ sont égaux, ayant chacun la moitié de l'arc AP pour mesure. Donc les angles APQ, TMP, & MmS sont égaux. Or les angles S & Q étant droits, on aura AQ : QP = MS : Sm. Soit donc AQ = x, AB = 1, PQ sera $= \sqrt{x - x^2}$ & Sm $= dx \sqrt{x - xx} : x$. Mais faisant l'extraction de la racine, on aura $\sqrt{x - x^2} = x^{1:2} - \frac{1}{2} x^{3:2} - \frac{1}{8} x^{5:2} - \frac{1}{16} x^{7:2}$, &c. Ce qui étant multiplié par dx, & divisé par x, donnera $x^{-1:2} dx - \frac{1}{2} x^{1:2} dx - \frac{1}{8} x^{3:2} dx - \frac{1}{16} x^{5:2} dx$, &c. dont l'intervale est $2x^{1:2} - \frac{1}{3} x^{3:2} - \frac{1}{20} x^{5:2} - \frac{1}{56} x^{7:2}$, &c. C'est la demi ordonnée QM de la Cycloïde par rapport à l'axe AB, laquelle étant multipliée par la difference de l'abscisse dx, nous donnera l'élement QMSq de l'aire AMQ de la Cycloïde. Ainsi $2x^{1:2} dx - \frac{1}{3} x^{3:2} dx - \frac{1}{20} x^{5:2} dx - \frac{1}{56} x^{7:2} dx$, &c. & son intégrale qui est $\frac{4}{3} x^{3:2} - \frac{2}{15} x^{5:2} - \frac{1}{70} x^{7:2} - \frac{1}{252} x^{9:2}$, &c. nous donnera la surface du segment AMQ. Mais cette suite ne nous menant pas visiblement à ce que l'on cherche; voici comme on s'y prendra: puisque nous avons trouvé mS ou Gg $= dx \sqrt{x - x^2} : x$. Si on la multiplie par GM $= x$, on aura pour l'élement de l'aire extérieure AMG, $dx \sqrt{x - x^2}$. Or cet élement étant le même que celui du segment de cercle APQ. Il s'ensuit que ce segment est toujours égal à la partie exterieure qui lui convient; & qu'ainsi toute la surface exterieure ADC est égale à tout le demi cercle APB. Or CB égale à la moitié de la circonference $= p$, AB $= a$, le rectangle DB sera $= ap$, la surface du demi cercle $= \frac{1}{4} ap =$ à la surface exterieure AMCD. Donc AMCBPA $= \frac{1}{2} ap$, & par conséquent, la surface de la Cycloide sera triple de celle de son cercle generateur. Et puisque le

triangle GMV eſt égal au triangle APQ ; le triligne AMV ſera égal au ſegment AP. Enfin ſi dans cette Cycloide l'ordonnée EH paſſe par le centre E, la ſurface AHFA eſt égale au quarré du rayon AE ; car

$$\frac{1}{2}\,p,\frac{1}{4}\,a = \frac{1}{8}\,ap = \text{AFE} = \text{AHI}$$

ainſi $\frac{1}{4}\,ap = \text{AFE} + \text{AHI}$

mais $\text{EH} \times \text{IH} = \text{IE} = \frac{1}{4}\,ap + \frac{1}{4}\,a^2$

Donc $\text{IE} - \text{AFE} - \text{AHI} = \quad \frac{1}{4}a^2 = \text{AHFA} = \text{AE}^2$

On peut déduire de-là que la ſurface du parallelogramme DH eſt double de celle du ſegment du quart de cercle generateur.

VIII. Dans la Ciſſoide y ayant $AB = a$. Soit $AP =$ Fig. 71.
$BQ = x$, $PM = y$, $PN = QR = u$, on aura

$$AP : PM = AQ : QR$$

$$x : y = a-x : \frac{ay-xy}{x} = u$$

De plus $\div$ BQ. QR. AQ. $\quad ay - xy = ux$

$$x \,.\, u \,.\, a-x \quad y : x = u : a-x$$

Par conſéq. $\div \; y \,.\, x \,.\, u \,.\, a-x.$

$$\& \; ay^2 - xy^2 = uxy = x^3$$

$$2ay\,dy - 2x\,dy - y^2\,dx = 3x^2\,dx$$

$$y$$

$$\overline{2, a-x}, dy - y\,dx = 3x^2 dx : y. \text{ or } x = uy, \&x^2 : y = x$$

Soit aussi $a - x = z$. Donc $2z\,dy - y\,dx = 3u\,dx$

$$2\,S, z\,dy - S.\,y\,dx = 3\,S : u\,dx.$$

Or udx est l'élement PNnp, du demi cercle; zdy est l'élement mMOo de l'aire AMOB; & ydx est l'élement PMmp, de l'aire AMP. Mais S, zdy est la surface entre la Cissoide AI, & son asymptote BH, pendant que S. ydx est la même surface. Donc $2\,S.\,zdy - S.\,ydx = S\,zdy$; & puisque dans le même cas S. udx donne le demi cercle ANB, on aura à cause de S. $zdy = 3$ S. udx tout l'espace infini de la Cissoide égal à trois fois la Surface du demi cercle generateur ANB.

Fig. 72. IX. Puisque dans la Logarithmique la soutangente PT $= a = ydx : dy$, supposant PM $= y$, P$p = dx$, on aura:

$$y\,dx : dy = a$$

$$y\,dx := a\,dy$$

S. $y\,dx = ay$. Donc l'espace indeterminé HPMI est égal au rectangle PM, PT. Soit à présent QS $= z$, l'espace ISQH sera $= az$. Donc l'espace SMPQ $= ay - az = a \times \overline{y - z}$. C'est-à-dire, l'espace renfermé entre deux demi-ordonnées de la Logarithme est égal au rectangle compris sous la Soutangen-

Digitized by Google

te & la difference des demi-ordonnées ; par consequent l'espace BAPM est à l'espace PMSQ = AB — PM : PM — SQ.

CHAPITRE TROISIEME.

Du l'Usage du Calcul Intégral pour la rectification des Courbes.

I. LA rectification des Courbes consiste à trouver une ligne droite qui soit égale à une Courbe proposée. Pour cet effet on conçoit que la Courbe est composée d'un nombre infini de petites lignes droites, qui, sont les élemens de la Courbe, dont la valeur d'une étant trouvée, leur somme ou intégrale donnera la longueur de toute la Courbe. Ainsi dans toute courbe MR étant = *dx*, *m*R = *dy*, *m*M qui est l'élement de la Courbe, sera $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$ en substituant la valeur de dx^2 ou de dy^2 tirée de l'équation differentielle de la Courbe, on aura une differentielle dont l'intégrale donnera la longueur de la Courbe. Voici des exemples. *Fig.* 64.

II. Pour déterminer la rectification de la Parabole ordinaire, son équation donne d'abord :

$$a\,dx = 2y\,dy$$

$$a^2 dx^2 = 4y^2 dy^2$$

$$dx^2 = 4y^2 dy^2 : a^2$$

Digitized by Google

Donc $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dy^2 + 4y^2dy^2 : a^2} = dy \sqrt{a^2 + 4y^2} : a$. Or $\sqrt{a^2 + 4y^2}$ étant réduite à une ſuite infinie on aura après l'operation faite $dy\sqrt{aa + 4y^2} : a = dy + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a^4} + \frac{4y^6dy}{a^6} - \frac{10y^8dy}{a^8}$, &c. Dont l'integrale eſt $y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$. &c. à l'infini, qui exprime l'arc AM de la Parabole. Or ſi on conçoit A C & DC, moitiés des axes d'une Hyperbole équilatere, chacune $= a$, $MP = 2y$, $QM = x$, on aura $AP = x - a$, & à cauſe de $PB \times AP = \overline{PM}^2$ $x^2 - a^2 = 4y^2$ par conſéquent $x^2 = 4y^2 + a^2$ & $x = \sqrt{4y^2 + a^2}$. Après ceci ſuppoſant $Qq = dy$ on aura $dy \times \sqrt{4y^2 + a^2}$ pour l'élement de l'aire CQMA. D'où on conclud que la rectification de la Parabole ordinaire dépend de la quadrature de l'eſpace hyperbolique CQMA. Où on pourra remarquer que toutes les ſommations ſe réduiſent à la quadrature des Courbes, dans quelques cas qu'on s'en ſerve. Ainſi pour les avoir parfaites il faut toujours obſerver la régle de l'Art. III. du Chapitre précedent.

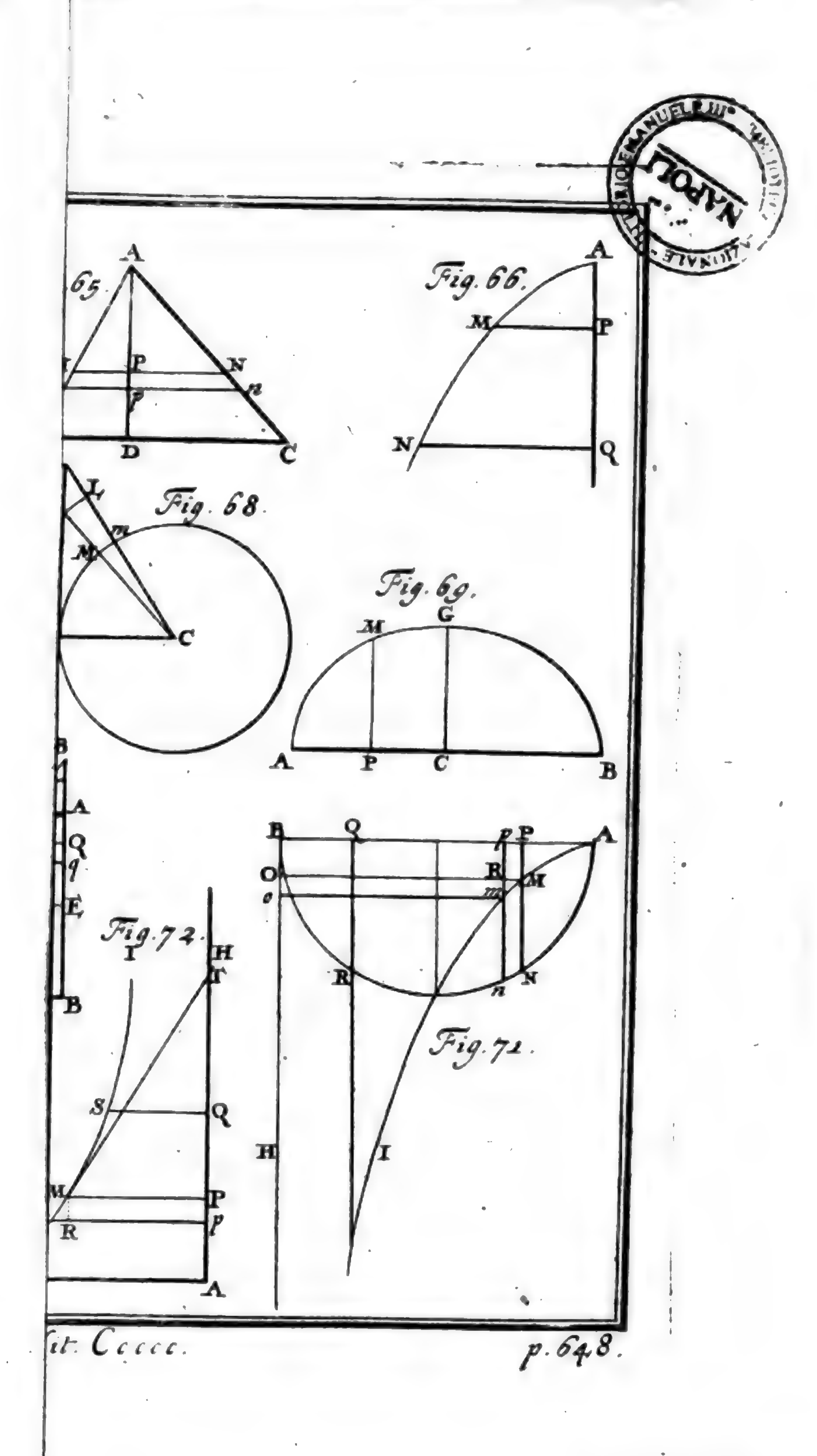
Fig. 73.

III. Pour trouver la rectification de la ſeconde Parabole, dans laquelle $ax^2 = y^3$ on ſuppoſera d'abord $a = 1$. Ce qui donnera :

$$x^2 = y^3$$

$$2\,x\,dx = 3\,y^2\,dy$$

Digitized by Google


65.
A
P
N
p
n
D
C
Fig. 66.
A
M
P
N
Q
L
m
M
Fig. 68
C
Fig. 69.
M
G
A
P
C
B
B
A
Q
q
E
B
Fig. 72.
I
H
T
S
Q
M
P
R
p
A
B
Q
p
P
A
O
R
M
o
m
R
n
N
Fig. 71.
H
I
NAPOLI

Digitized by Go

$$4x^2 dx^2 = 9y^4 dy^2$$

$$dx^2 = \overline{9y^4 dy^2 : 4x^2} = 9y^4 dy^2 : 4y^3 = \tfrac{9}{4} y dy^2$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\tfrac{9}{4} y dy^2 + dy^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{9ydy^2 + 4dy^2} = \tfrac{1}{2}dy\sqrt{9y+4}$$

Pour rendre cet élement intégrable soit :

$$\sqrt{9y+4} = u$$

Donc $9y + 4 = u^2$

$$9dy = 2udu$$

$$\tfrac{1}{2}dy\sqrt{9y+4} = \tfrac{1}{9}u^2 du$$

S. $\frac{1}{2}dy\sqrt{9y+4} = \frac{1}{27}u^3 = \frac{1}{27}\overline{9y+4}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{27} \times \overline{9y+4} \times \overline{9y+4}^{\frac{1}{2}}$ & afin que cette somme exprime la longueur de l'arc ; soit $y = 0$, ce qui donnera pour reste la constante $\frac{1}{27}\sqrt{4} = \frac{8}{27}$. Donc tout l'arc sera $\frac{1}{27} \times \overline{9y+4}^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}$. Soit à présent dans la Parabole ordinaire le parametre $= 1$. L'abscisse déterminée $AP = 1$. *Fig.* 74. Sa partie changente $PQ = \frac{9}{4}y$, AQ sera $= \frac{9}{4}y + 1$, & $\overline{QN} = \frac{9}{4}y + 1 = \overline{9y+4} : 4$; par conséquent $QN = \frac{1}{2}\sqrt{9y+4}$. Donc l'élement $QNnq$ de l'espace parabolique $PMNQ = \frac{1}{2}dy \times \sqrt{9y+4}$. D'où il est évident que la recrification de la seconde Parabole, dans laquelle $ax^2 = y^3$ dépend de la quadrature de la Parabole ordinaire ; or celle-ci se trouvant exactement, on voit que l'autre se doit trouver de même.

Fig. 75. IV. Le Sinus PQ d'un arc de cercle AP étant donné, voici de quelle maniere on infere pour trouver la longueur de l'arc AP.

Soit le rayon $AI = 1.\ PQ = y.\ AQ = x.$

On aura $2x - xx = yy$

$$2dx - 2xdx = 2ydy.$$

$$dx = ydy : \overline{1-x}$$

$$dx^2 = y^2dy^2 : \overline{1-2x+x^2} = y^2dy^2 : \overline{1-y^2}$$

$$\sqrt{\overline{dx^2+dy^2}} = \sqrt{\overline{y^2dy^2 : 1-y^2 + dy^2}} = \sqrt{\overline{y^2dy^2 + dy^2 - y^2dy^2 :}}$$
$$\sqrt{\overline{1-y^2}} = dy : \sqrt{\overline{1-y^2}} = dy \times \overline{1-y^2}^{-\frac{1}{2}}.$$

Cet élement étant réduit à une suitte infinie par le moyen de l'extraction de la racine, on aura ;

$$dy : \sqrt{\overline{1-y^2}} = dy + \tfrac{1}{2}y^2dy + \frac{1,3}{2,4}y^4dy + \frac{1,3,5}{2,4,6}y^6dy + \frac{1,3,5,7}{2,4,6,8}y^8dy,$$ &c. à l'infini.

Dont l'intégrale sera $y + \frac{1}{2,3}y^3 + \frac{1,3}{2,4,5}y^5 + \frac{1,3,5}{2,4,6,7}y^7 + \frac{1,3,5,7}{2,4,6,8,9}y^9$, &c. pour l'arc AP, dont le sinus $PQ = y$.

Soit le premier terme A, le second B, le troisiéme C, &c. Le second multiplié par $\frac{1}{5}$, le troisiéme par $\frac{3}{3}$, le

quatriémè par $\frac{5}{5}$, &c. Cette suite sera changée en celle-ci :

$$y + \frac{1,1}{2,3} A y^{2} + \frac{3,3}{4,5} B y^{2} + \frac{5,5}{6,7} C y^{7} + \frac{7,7}{8,9} D y^{2}, \&c.$$

Soit le sinus du complement QI $= x$, on aura PQ $= \sqrt{1 - xx}$, & puisque les deux triangles rectangles QPI, PpO sont semblables, les deux angles pPO, QPI faisant chacun un droit avec OPI, on aura : Fig. 76.

$$PQ : PI = PO : Pp.$$

$$\sqrt{1-xx} : 1. = dx : dx : \sqrt{1-x^{2}}.$$

Or cet élement étant le même que le précedent, il est évident que si dans la suite précedente on substituë x à la place de y, on trouvera l'arc qui est le complément de l'autre à 90.° Enfin le sinus verse AQ étant $= x$, AB $= 1$, on aura P$p = dx : 2\sqrt{x-x^{2}}$ dont l'extraction de racine donne la suite :

$$\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{1,3}{4,4} x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{1,3,5}{4,4,6} x^{\frac{5}{2}} dx + \frac{1,3,5,7}{2,4,6,8} x^{\frac{7}{2}} dx$$

Dont l'intégrale est :

$$x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2,3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1,3}{2,4,5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1,3,5,}{2,4,6,7,} x^{\frac{7}{2}} + \frac{1,3,5,7}{2,4,6,8,6} x^{\frac{9}{2}} \&c.$$

$$\text{ou} \sqrt{x} \times 1 + \frac{1}{2,3} x + \frac{1,3}{2,4,5} x^{2} + \frac{1,3,5}{2,4,6,7} x^{3} + \frac{1,3,5,7}{2,4,6,8,9} x^{4}, \&c.$$

pour l'arc AP.

Soit la Tangente BK $= x$, le rayon BC $= 1$. Nous avons vû dans le Chapitre précedent que M$m = dx : \overline{1 + x^{2}}$. Dont la division donne la suite : Fig. 77.

$dx - x^2 dx + x^4 dx - x^6 dx + x^8 dx - x^{10} dx$, &c.

Dont la S. $= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$, &c.

Et parce que la Tangente de 45.° est égale au rayon, si on met 1 à la place de x on aura l'arc de 45°. ou un demi quart de cercle $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$, &c. Et cette même suite donne le quart de cercle dont le diametre $= 1$, &c.

Fig. 75. En échange l'arc AP étant donné, on pourra trouver son sinus PQ par le moyen d'une suite infinie, supposée à la place de y. Car tout étant nommé comme ci-dessus, & l'arc AP $= v$, nous venons de voir que $v = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{35}{1152}y^9$, &c. Donc si à la place de y on substitue une suite de v, & de ses puissances impaires, dont chaque terme soit multiplié par un coëfficient indéterminé a, b, c, &c. on aura $y = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$, &c. Et cherchant les valeurs des termes de la suite $y + \frac{1}{6}y^3$, &c. la substitution, dans laquelle on suppose chaque terme $= 0$, nous donnera les valeurs des coëfficiens indéterminés a, b, &c. moyennant quoi on formera une nouvelle suite, qui nous donnera la valeur de y en v, & ses puissances. Voici l'operation :

$$y = av + bv^3 + cv^5 + dv^7, \&c.$$

$$\frac{1}{6}y^3 = \quad + \frac{1}{6}a^3v^3 + \frac{3}{6}a^2bv^5 + \frac{3}{6}ab^2v^7, \&c.$$

$$+ \frac{3}{6}a^2cv^7$$

$$\frac{3}{40}y^5 = \quad + \frac{3}{40}a^5v^5 + \frac{3}{8}a^4bv^7, \&c.$$

$$\frac{5}{112}y^7 = \quad + \frac{5}{112}a^7v^7, \&c.$$

$$-v = -v$$

$av - v = 0$, $b + \frac{1}{6}a^3 = 0$ $c + \frac{1}{2}a^2b + \frac{3}{40}a^5 = 0$ $d + \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{2}a^2c + \frac{3}{8}a^4b + \frac{5}{112}a^7 = 0$

$a - 1 = 0$ $b + \frac{1}{6} = 0$ $c - \frac{1}{12} + \frac{3}{40} = 0$ $d - \frac{1}{72} + \frac{1}{240} - \frac{1}{16} + \frac{5}{112} - 0$

$a = 1$ $b = -\frac{1}{6}$ $c = \frac{1}{12} - \frac{3}{40} = \frac{1}{120}$ $d = -\frac{11}{5040}$.

D'où il résulte

$$y = v - \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5 - \frac{1}{5040}v^7, \&c.$$

$$\text{ou } y = \frac{1}{1}v - \frac{1}{1,2,3}v^3 + \frac{1}{1,2,3,4,5}v^5 - \frac{1}{1,2,3,4,5,6,7}v^7, \&c.$$

V. Dans la Cycloide AB étant $= 1$, AQ $= x$, Qq $= dx$, on aura PQ $= \sqrt{x - x^2}$, & AP $= \sqrt{x} = x^{1:2}$ & puisque les deux triangles APQ, MmS sont semblables, selon ce qu'on a démontré cy-dessus, on aura : *Fig.* 78.

$$AQ : AP = MS : Mm$$
$$x : x^{1:2} = dx : x^{-1:2}dx$$

Mais Mm est la differentielle de l'arc de la Cycloide AM. Donc S.$x^{-1:2}dx = 2x^{1:2} = 2$AP, qui est la valeur de l'arc AM.

CHAPITRE QUATRIEME.

De l'Usage du Calcul Integral pour cuber les Solides.

I. Si on conçoit qu'une figure plane, telle que AMNQ tourne à l'entour de son axe AQ, elle décrira un *Fig.* 79.

Digitize

Solide. Or la demi-ordonnée PM en ayant une autre infiniment proche *pm*, le trapezoïde PM*mp*, qui ne differera pas sensiblement d'un parallelogramme, décrira dans cette révolution une espece de petit cylindre, qui est l'élement du solide, qui est censé composé d'un nombre infini de petits cilindres de même nature; par conséquent leur somme donnera le solide entier. Soit pour cet effet $AP = x$, $PM = y$, $Pp = dx$. La raison du rayon à la circonference $r : p$, on aura la circonference du cercle décrit du rayon $PM = py : r$, & sa surface $py^2 : 2r$. laquelle multipliée par dx donnera $py^2dx : 2r$, pour l'élement du Solide. Et mettant dans cette formule la valeur de y^2, tirée de l'équation de la Courbe, on aura l'élement du Solide, dont AP est la hauteur, & PM le rayon de la base; lequel élement étant intégrable, on aura la solidité cherchée. Voici des exemples:

Fig. 80. II. On sçait que lorsqu'un Triangle rectangle ACD tourne autour de l'axe immobile DC, il décrira le Cône ADB. Soit donc $DC = a$, $AC = r$, $PM = y$, $DP = x$, on aura:

$$DP : PM = DC : AC$$
$$x : y = a : r$$

$$rx : a = y$$

$$r^2x^2 : a^2 = y^2$$

$$py^2dx : 2r = pr^2x^2dx : 2a^2r = prx^2dx : 2a^2$$

$$S.\ prx^2dx : 2a^2 = prx^3 : 6a^2$$

Or ſubſtituant a à la place de x, la ſolidité du cône entier ſera $\frac{1}{6}apr = \frac{1}{2}pr, \frac{1}{3}a$. C'eſt-à-dire, la baſe multipliée par le tiers de la hauteur.

III. Pour trouver la ſolidité d'une Sphere, on la peut d'abord concevoir formée par la révolution d'un demi cercle à l'entour du diametre ; & puiſque dans tout cercle on a :

$$y^2 = 2rx - x^2$$

Et par conſéquent $py^2dx : 2r = pxdx - \overline{px^2dx : 2r}$

Donc $\quad S.\ py^2dx : 2r = \frac{1}{2}px^2 - \overline{px^3 : 6r}$

Ce qui nous donne la ſolidité d'un ſegment de Sphere indéterminé, dont $2r$ eſt le diametre, & x la hauteur. Or ſi à la place de x on ſubſtituë le diametre $2r$, on aura la ſolidité de toute la Sphere $2pr^2 - \overline{8pr^3 : 6r} = \frac{2}{3}pr^2$. Mais la ſolidité du Cilindre circonſcrit à la Sphere, étant pr^2, il eſt évident que la Sphere eſt à ce Cilindre comme $2 : 3$.

IV. On trouve de même maniere qu'un Conoïde Parabolique, formé par la révolution de la Parabole ordinaire à l'entour de ſon axe, eſt la moitié d'un Cilindre de même baſe & de même hauteur ; car à cauſe de $ax = y^2$.

$$py^2dx ; 2r = paxdx : 2r.$$

$$S. = pax^2 : 4r$$

Et $\div\!\div\ a, r, x$ donnent $pax^2 : 4r = prx : 4$, au lieu que la ſolidité du Cilindre eſt $p \times \frac{1}{2}r \times x = prx : 2$.

V. Pour trouver la solidité d'un Spheroïde Elliptique, formé par la révolution d'une Ellipse à l'entour de son axe; on sçait que dans l'Ellipse ordinaire $yy = bx - bx^2 : a$.

Donc $py^2 dx : 2r = pbxdx : 2r - pbx^2 dx : 2ar$

$$S. \; py^2 dx : 2r = pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar$$

Et substituant l'axe a à la place de l'abscisse x. la solidité de tout le Spheroide sera $pba^2 : 4r - pba^2 : 6r = pba^2 : 12r$, & supposant $2r =$ à l'axe conjugué, on aura $4r^2 = ab$. Par conséquent le Spheroïde sera $4par^2 : 12r = \frac{1}{3} par$. Mais le Cilindre circonscrit est $p X \frac{1}{2} r X a = \frac{1}{2} par$; Donc le Spheroide est au Cilindre comme $2 : 3$. On peut trouver de même que le Spheroide est à la Sphere qui a le plus grand axe pour diametre, comme le quarré du petit axe est au quarré du grand axe; & qu'il est à la Sphere qui a le petit axe pour diametre, comme le grand axe est au petit axe.

VI. Pour trouver la solidité d'un Conoide Hyperbolique, qui est formé par la révolution d'une Hyperbole à l'entour de son axe; on peut d'abord concevoir une Hyperbole équilatere, dans laquelle y ayant $y^2 = ax + x^2$. on aura $S. \; py^2 dx : 2r = apx^2 : 4r + px^3 : 6r$. & supposant la hauteur de ce Conoide $x = a$, sa solidité sera $pa^3 : 4r + pa^3 : 6r = 10pa^3 : 24r = 5pa^3 : 12r$. Or dans ce cas $r = \sqrt{2a^2}$. Donc $12r = 12a\sqrt{2}$; par conséquent $5pa^3 : 12r = 5pa^2 : 12\sqrt{2}$. Mais dans ce même cas le Cylindre circonscrit est $p, \frac{1}{2}\sqrt{2a^2}, a = \sqrt{2}pa^2 : 2$. Donc le Conoide est au Cilindre comme $\frac{5}{12\sqrt{2}} : \sqrt{2} : 2 :: 10 : 24$, ou $= 5 : 12$.

Digitized by Google

Si la hauteur $x = \frac{5}{2} a$, ce rapport ſera comme 4 : 9.

Si l'Hyperbole eſt Scalene, ſon premier axe $= a$, le Parametre $= b$, l'axe conjugué ſera $\sqrt{ab}$; & ſon équation $y^2 = bx + bx^2 : a$. Par conſéquent S. $py^2 dx : 2r = pbx^2 : 4r + pbx^3 : 6ar$. Or ſi on ſuppoſe le rayon de la baſe du Conoide $= \frac{1}{2}\sqrt{ab} = r$, on aura en ce cas la hauteur $x = \sqrt{\frac{1}{2}a^2} - \frac{1}{2}a$, & ſubſtituant cette valeur de x on aura pour le ſolide du Conoide:

$\frac{pb}{2\sqrt{ab}} \times \overline{\sqrt{\frac{1}{2}a^2} - \frac{1}{2}a}^2 + \frac{pb}{3a\sqrt{ab}} \times \overline{\sqrt{\frac{1}{2}a^2} - \frac{1}{2}a}^3$ & la ſolidité de ſon Cylindre circonſcrit ſera $p \times \frac{1}{4}\sqrt{ab} \times \overline{\sqrt{\frac{1}{2}a^2} - \frac{1}{2}a}$

Et comparant ces deux grandeurs on trouvera que dans ce cas le Cylindre eſt au Conoide comme $3 : \sqrt{2}$. Mais ſi l'abſciſſe devient égale au premier axe on aura $y = \sqrt{2ab} = r$; par conſéquent la ſolidité du Conoide en ce cas ſera $\frac{pba^2}{4\sqrt{2ab}} + \frac{pba^2}{6\sqrt{2ab}} = \frac{5pba^2}{12\sqrt{2ab}}$, & celle de ſon Cylindre circonſcrit $p \times \frac{1}{2}\sqrt{2ab} \times a$. Ce qui donnera encore en comparant le Conoide au Cylindre, comme 5 : 12.

On voit par là qu'il n'y a pas de rapport conſtant entre l'Hyperboloide & ſon Cylindre circonſcrit. Ainſi il eſt à propos de s'adreſſer à autre choſe. Soit pour cet effet le Cone tronqué DEQR, formé par la révolution des Aſymptotes CR ou CQ, à l'entour de l'Hyperboloide MAN, & de même hauteur. Nommant le premier axe $= a$, & le parametre $= b$ on ſçait que $\overline{PR}^2 = \frac{1}{4}ab + bx + bx^2 : a$, que $\overline{PM}^2 = bx + bx^2 : a$, & que par conſéquent $\overline{PR}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{DA}^2 = \frac{1}{4}ab$. Mais par la *Fig. 25.*

Digitized by Google

nature du Cone tronqué la base d'embas, celle d'enhaut & leur moyenne proportionelle étant multipliées par le tiers de la hauteur nous en donnent la solidité. Donc $\frac{1}{4}ab + bx + \overline{bx^2 : a} \times \frac{1}{4}ab$ nous donne $\frac{1}{16}a^2b^2 + \frac{1}{4}ab^2x + \frac{1}{4}b^2x^2$. Dont la racine $\frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}bx$ est cette surface moyenne proportionelle. Ainsi supposant la raison du rayon à la circonference $r : p$, nous aurons

$\frac{1}{4}ab + bx + bx^2 : a$
$\frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}bx$
$\frac{1}{4}ab$

$$\frac{\frac{3}{4}ab + 1\frac{1}{2}bx + \frac{bx^2}{a} \times px}{6r}$$ = à la solidité du cône tronqué DEQR.

Après ceci l'équation generale de l'Hyperbole étant $bx + \frac{bx^2}{a} = y^2$. Si dans la formule generale du Conoïde $py^2dx : 2r$ on substituë la valeur de y^2 on aura $\frac{pbxdx + p\frac{bx^2dx}{a}}{2r}$ dont l'intégrale sera $\frac{pbx^2}{4r} + \frac{pbx^3}{6ar}$ & cette valeur étant réduite à la même dénomination, & dans la forme de l'expression du cône tronqué ci dessus, nous aurons la raison de l'Hyperboloïde au Cone tronqué. $\frac{1\frac{1}{2}bx + \frac{bx^2}{a} \times px}{6r} : \frac{\frac{3}{4}ab + 1\frac{1}{2}bx + \frac{bx^2}{a} \times px}{6r}$

D'où il est évident, que le Cone tronqué surpasse l'Hy-

Digitized by Google

perboloïde de la grandeur $\frac{\frac{1}{4}ab \times px}{6r} = \frac{abx, p}{8r}$ Ce qui n'eſt autre choſe qu'un Cylindre, qui a pour baſe un Cercle, dont DA $= \sqrt{\frac{1}{4}ab}$ eſt le rayon, & dont la hauteur $= x$. La même choſe ſe trouve encore élementairement, ſçachant que dans le Cercle RQ, la couronne RMQN eſt égale au Cercle DE. Car l'Ecüelle Hyperbolique MANQEDR étant composée d'un nombre infini de telles couronnes, elle eſt égale à un Cylindre composé d'un pareil nombre infini de Cercles égaux à celui de DE. On en peut encore inferer que l'Hyperboloïde eſt égal à un Orbe triangulaire, fait par la révolution du triangle DVR à l'entour de l'axe AP.

VII. Si on conçoit un ſolide formé par la révolution d'une Parabole AMN, autour de ſa demi ordonnée NQ, il eſt d'abord évident que le Cercle décrit du rayon MR, multiplié par la difference Rr ſera l'élement de ce ſolide. Donc la raiſon du rayon à la circonference étant $= r : p$. AQ $= r$. AP $= x$. QN $= b$. PM $= y$. on aura R$r = dy$ MR $= r - x$. La circonference décrite du rayon MR $= \overline{pr - px} : r$ & la ſurface du Cercle $\overline{pr^2 - 2prx + px^2} : 2r$; par conſéquent l'élement du ſolide ſera $\frac{1}{2}prdy - pxdy + \overline{px^2dy : 2r}$. Or le parametre de la Parabole étant 1, on aura $y^2 = x$, & $y^4 = x^2$. Leſquelles valeurs étant ſubſtituées dans l'expreſſion génerale de l'élement nous aurons $\frac{1}{2}prdy - py^2dy + \overline{py^4dy : 2r}$ dont l'intégrale $\frac{1}{2}pry - \frac{1}{3}py^3 + \overline{py^5 : 10r}$ donne une valeur indéterminée du ſolide, formé par la révolution de la partie MNR à l'entour de NR, dans laquelle ſubſtituant x à la place de y^2 on aura $p \times \overline{\frac{1}{2}ry - \frac{1}{3}xy + x^2y : 10r}$. & Fig. 81.

Digitized by Google

mettant enfin b à la place de y, & r à la place de x, on aura le solide entier $p \times \overline{\frac{1}{2} br - \frac{1}{3} br + \frac{1}{10} br} = \frac{4}{30} pbr = \frac{1}{2} pr \times \frac{8}{15} b$. C'est-à-dire, la surface du Cercle qui est la base se multiplie par $\frac{8}{15}$ de la hauteur QN.

CHAPITRE CINQUIEME.

Usage du Calcul Intégral pour trouver les Surfaces des Solides, formés par la révolution d'une Figure à l'entour d'un Axe.

Fig. 82. I. SOit AP $= x$, PM $= y$, & la raison du rayon à la circonference $r : p$, on aura $Pp =$ MR $= dx$, & mR $= dy$, par conséquent M$m = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on conçoit d'abord que la Zone formée par la révolution de Mm est l'élement de la surface du solide; & cette Zone n'étant autre chose que la circonference du Cercle décrit du rayon PM, multipliée par Mm, il est évident que cet élement sera $py \times \sqrt{dx^2 + dy^2} : r$, ainsi on n'aura qu'à substituer la valeur de dx^2 tirée de la nature de la figure ANQ, & rendre cet élement intégrable; & on trouvera par le moyen de ce Calcul la Surface cherchée, dont voici quelques exemples :

Fig. 83. II. On sçait qu'un cône est formé par la révolution d'un triangle. Soit donc pour cet effet CD $= a$, AC $= r$, DP $= x$, PM $= y$. Ce qui donnera :

$$x : y = a : r$$

$$r x = a y$$

$$r dx = a dy$$

$$dx^2 = a^2 dy^2 : r^2$$

$$py\sqrt{dx^2 + dy^2} : r = py\sqrt{a^2dy^2 + r^2dy^2} : r^2 = pydy\sqrt{a^2 + r^2} : r^2$$

$$S. = py^2\sqrt{a^2 + r^2} : 2r^2$$

Or si on met dans cette intégrale r, à la place de y, on aura la surface entiere du cône $= \frac{1}{2} p\sqrt{a^2 + r^2} = \frac{1}{2} p \times DA$.

III. Pour la Surface de la Sphere; soit le diametre de son Cercle generateur $=1$, AP $= x$, PM $= \sqrt{x - xx}$. *Fig.* 84.
Donc Pp ou MR $= dx$, & mR $= \frac{dx - 2xdx}{2\sqrt{x - x^2}}$ par conséquent $dx^2 + \overline{dx - 2xdx : 2\sqrt{x - x^2}}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{mR}^2 = \overline{Mm}^2$ & ainsi Mm $= dx : 2\sqrt{x - x^2}$ la circonference du Cercle décrit du rayon PM $= 2p\sqrt{x - x^2}$, laquelle multipliée par l'élement Mm donnera pour la Zone élementaire de la Surface pdx, dont l'integrale px, est la mesure indéfinie de la Surface de tout segment Spherique dont la hauteur est x. Et si à la place de x on substituë le diametre 1, toute la Surface de la Sphere se trouve être le produit du diametre par le plus grand Cercle p.

IV. Pour trouver la surface du Conoide Parabolique on sçait qu'à la Parabole

$$a\,dx = 2y\,dy$$

$$dx^2 = 4y^2\,dy^2 : a^2$$

$py\sqrt{dx^2 + dy^2} : r = py\sqrt{4y^2dy^2 + a^2dy^2} : ar = pydy$ $\sqrt{4y^2 + a^2} : ar$, pour rendre cet élement integrable soit:

$$\sqrt{4y^2 + a^2} = u$$

$$4y^2 + a^2 = u^2$$

$$8y\,dy = 2u\,du$$

$$y\,dy = \tfrac{1}{4}u\,du$$

$$pydy\sqrt{4y^2 + a^2} : ar = pu^2du : 4ar.$$

$$S. = pu^3 : 12ar = \overline{4py^2 + pa^2} \times \sqrt{4y^2 + a^2} : 12ar$$

Et supposant dans cette integrale $y = 0$, il restera pa^2 $\sqrt{a^2} : 12ar = \frac{pa^2}{12r}$ qu'il y faudra joindre avec le signe —, pour avoir la Surface complete $\overline{4py^2 + pa^2} \times \sqrt{4y^2 + a^2} :$ $12ar - pa^2 : 12r$. Et enfin substituant r à la place de y on trouvera la surface entiere du Conoide $= \overline{4pr^2 + pa^2} \times$ $\sqrt{4r^2 + a^2} : 12ar - pa^2 : 12r$.

CHAPITRE SIXIEME.

De l'Usage du Calcul Intégral pour déterminer les Centres de Gravité.

Fig. 85. I. On sçait par les Principes de la Mechanique, que si plusieurs poids F, G, H, I, soit en équilibre autour du point C, leurs momens, qui sont les pro-

duits des masses par leurs distances du point C de part & d'autre sont égaux, de sorte que $F \times AC + G \times BC = H \times CD + I \times CE$. Comme aussi que la somme des momens d'un côté étant divisée par la somme des poids, donne le centre commun de gravité de ces poids; ainsi $\overline{H \times CD + I \times CE : H + I}$ donne CK; de sorte que ces deux poids H, I pris ensemble étant suspendus au point K, feront encore le même effet qu'ils auroient fait étant suspendus séparément H en D & I en E.

II. Ceci supposé on peut concevoir que les Elemens des figures tels que M N *n m* ne sont autre chose qu'autant de poids, suspendus à l'axe AX, de la figure qui divise chacun en deux également, & sur lequel par conséquent on peut déterminer un point, où tous ces poids se contrebalancent les uns les autres; ce point sera le Centre commun de gravité, & il se trouvera en divisant la somme de tous les momens de ces poids par la somme desdits poids. Ainsi soit $AP = x$, $PM = y$, $Pp = dx$, un de ces poids ou Elemens $2ydx$, par conséquent leur somme $2S.ydx$. Le moment de l'un de ces poids $2yxdx$; par conséquent la somme de tous ces momens $2S.yxdx$. Donc $S.yxdx : S.ydx$ donnera la distance A F, depuis le sommet de l'axe jusqu'au centre de gravité. Ainsi on n'aura plus qu'à déterminer les integrales de $yxdx$ & de ydx, comme on verra par les exemples suivants : Fig. 86.

III. Soit le triangle ABC, & la ligne AD, qui divise sa base en deux également, on connoît d'abord que le centre de gravité se trouvera sur cette ligne AD. Pour le déterminer, soit $AD = a$, $BC = b$, $AP = x$, $MN = y$, $Pp = dx$, on aura : Fig. 87.

Digitized by Google

$$AP : MN = AD : BG$$
$$x : y = a : b.$$

$$y = bx : a$$

$$ydx = bxdx : a \qquad yxdx = bx^2 dx : a$$

$$S.\ ydx = bx^2 : 2a \qquad S.\ yxdx = bx^3 : 3a.$$

Donc $\frac{bx^3 : 3a}{bx^2 : 2a} = \frac{2abx^3}{3abx^2} = \frac{2}{3}x.$ donne la détermination indéfinie du centre de gravité du triangle. Ainsi substituant a à la place de x on aura $\frac{2}{3}a$, pour la distance du centre de gravité F depuis le sommet A.

IV. Pour déterminer le Centre de gravité de la Parabole ordinaire, on sçait que son équation est :

$$yy = ax$$

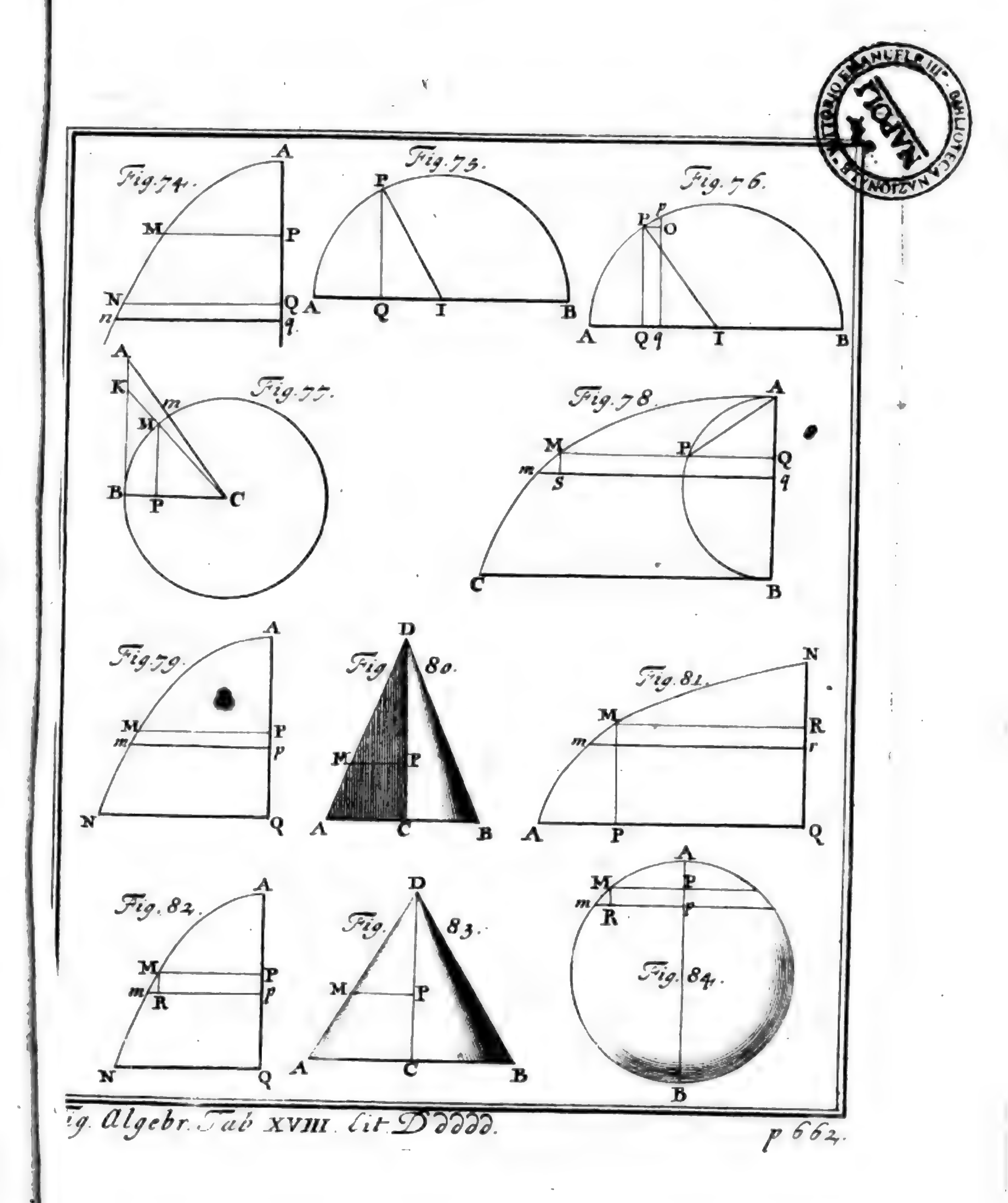
$$y = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$$

$$ydx = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx.\ xydx = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx$$

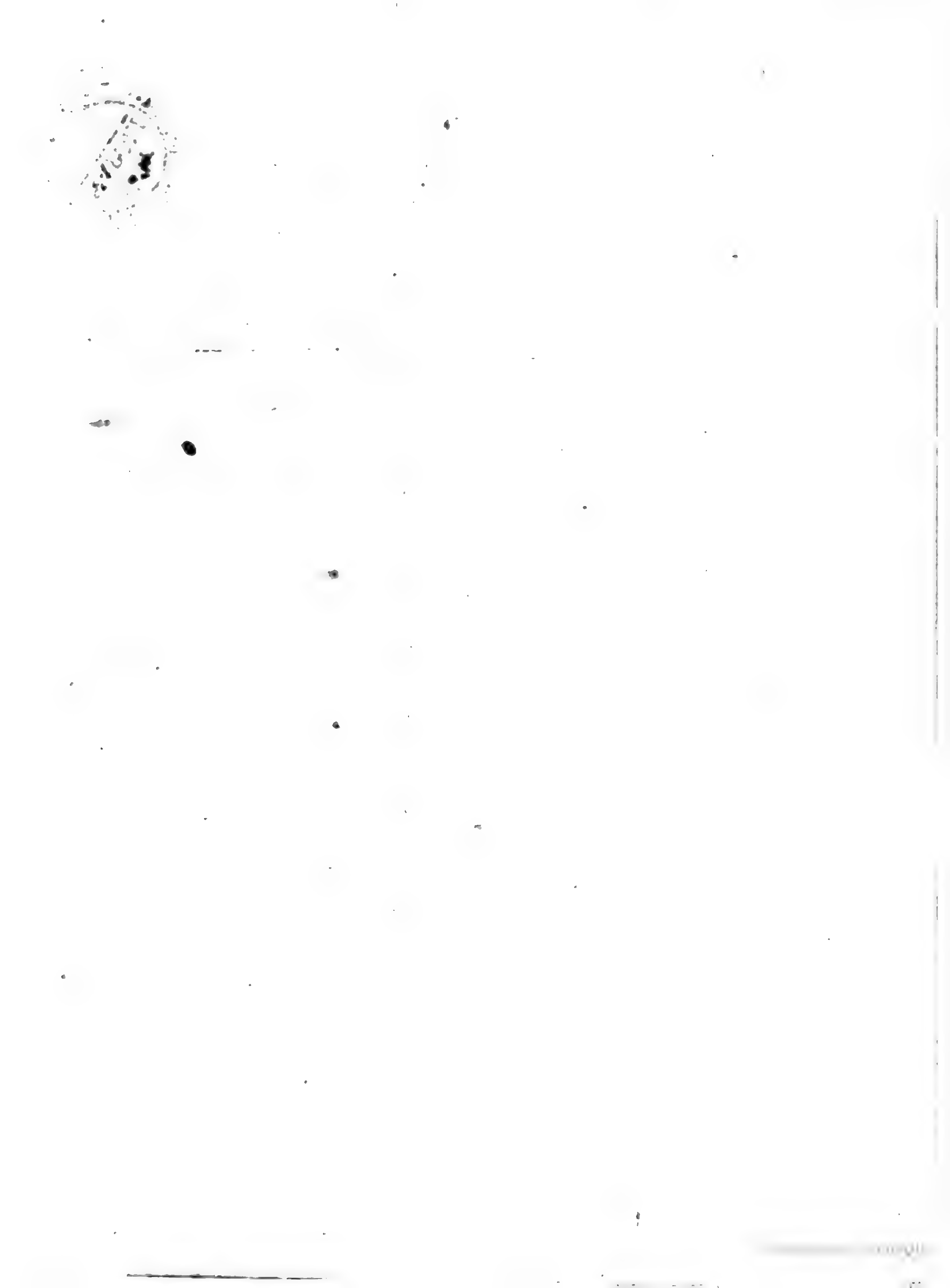
$$S.\ ydx = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}.\quad S.\ yxdx = \frac{2}{5} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}$$

Donc $\frac{\frac{2}{5} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5} x$

V.



BIBLIOTECA NAZIONALE · VITTORIO EMANUELE III · NAPOLI



V. Pour déterminer le centre de gravité d'une Parabole exterieure AST, soit AQ $= x$, QM $= y$, le Parametre $= 1$, par conséquent :

$$y = x^2$$

$$y\,dx = x^2\,dx. \quad xy\,dx = x^3\,dx$$

$$S.\ y\,dx = \tfrac{1}{3}x^3. \quad S.\ xy\,dx = \tfrac{1}{4}\,x$$

Donc $\dfrac{\frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{3}x^3} = \frac{3}{4}x.$

VI. Pour déterminer le centre de gravité d'un arc de Cercle quelconque comme ADB, il est d'abord évident que le rayon CD, qui divise cet arc en deux également passera par ledit centre. Après quoi concevant cet arc ou sa moitié AD, divisée en un nombre infini de parties égales, telles que A M, *am*; si on tire sur les cordes les perpendiculaires MR, *mr*, de même que les rayons AC, *a*C, on aura par-tout, en supposant que ces petits arcs dégenerent en lignes droits, des triangles semblables AMR, ACG, *amr*, *a*C*g*, & par conséquent MA : AR = AC : CG, ou *ma* : *ar* = AC : C*g*. Or prenant les petits arcs de même que leurs parties de corde correspondantes pour des poids, tandis que le rayon AC & la ligne CG ou C*g* sont les bras d'un levier ; il y aura pour tout MA x CG = AR x AC. C'est pourquoi prenant d'un côté la somme de tous les MA, c'est-à-dire, tout l'arc ADB, & de l'autre la somme de tous les AR, c'est-à-dire, la corde AB, Fig. 89.

on pourra dire que tout l'arc ADB ou ſa moitié AD, eſt à toute la corde AB, ou à ſa moitié AG, comme AC, bras conſtant du levier, eſt à CE, bras du levier, depuis le centre C juſqu'au point E, centre commun de gravité de toutes les parties de l'arc ADB.

Fig. 90.

VII. Le centre de gravité d'un Secteur de Cercle ADBC ſe trouve ſur la ligne DC, qui le diviſe en deux également. Or ſi on y décrit un arc quelconque, comme PNM, & un autre infiniment proche *pnm*, il eſt évident que le moment de l'arc PNM, multiplié par P*p*, donnera le moment du ſegment annulaire PNM*mnp*, lequel ſera en même tems la differentielle des momens du ſecteur entier. Or nous avons vû dans l'article précedent, que le moment de l'arc ADn'eſt autre choſe que AE×AC. Donc le moment de tout l'arc ADB, ſera AB×AC, au lieu que le moment de l'arc PNM s'exprimera par PM ×PC; par conſéquent ces momens ſeront entr'eux comme les triangles ABC, PMC, ou comme $\overline{AC}^2 : \overline{PC}^2$, ainſi nommant AC $= a$, AE $= b$, AD $= p$, PC $= x$, le moment de l'arc ADB ſera $= 2ab$; par conſéquent nous aurons $a^2 : x^2 = 2ab : \frac{2abx^2}{a^2} = 2bx^2 : a$, égal au moment de l'arc PNM, ce qui multiplié par dx donnera $2bx^2\,dx : a$ pour le moment du ſegment annulaire PM*mp*. Or l'intégrale ou la ſomme de tous ces momens, qui eſt $2bx^3 : 3a$ étant diviſée par la ſomme de tous les poids, c'eſt-à-dire par la ſurface du ſecteur, qui eſt ap, donnera $2bx^3 : 3a^2p$ pour la diſtance indéfinie du centre de gravité du ſecteur; ainſi ſubſtituant a à la place de x, nous aurons pour cette diſtance dans le ſecteur determiné, dont a eſt le rayon, $2ba^3 : 3a^2p = 2ab : 3p =$ 2AC×AE : 3AD.

Digitized by Google

Mais $AC \times AE : AD$ donne la diſtance du cercle de gravité de l'arc de cercle ADB depuis le centre C. Donc la diſtance qui eſt entre le centre de gravité du ſecteur & le centre du cercle eſt à la diſtance qui eſt entre le centre de gravité de l'arc ADB, & le centre du cercle comme $2 : 3$; par conſéquent ſi la ſurface eſt un demi cercle, l'arc AD devient le quart du cercle & AE le rayon. Donc en ce cas on aura le centre de gravité $\frac{2}{3} AC^2 : AD$ ∽ le quart de cercle $AD : AC = \frac{2}{3} AC : CF$.

VIII. Après ceci il ne ſera pas difficile de terminer le centre de gravité d'un ſegment de Cercle, comme DEHD; car ayant trouvé le centre de gravité de tout le ſecteur, qui ſoit le point F, de même que le centre de gravité du triangle rectiligne DEC, qui eſt le point L, on ſçait que les diſtances des poids de leur centre commun de gravité ſont en raiſon réciproque des poids; par conſéquent on n'aura qu'à chercher une quatriéme grandeur proportionelle à la ſurface du ſegment DEHD à celle du triangle DEC, & à la ligne LF, qui ſera, par exemple FK. On déterminera de même le centre de gravité de la Lune d'Hippocrate, en cherchant 1.° Le centre de gravité G de tout le demi cercle ADBEA. 2.° Le centre de gravité du ſegment ACBEA, qui ſoit H. 3.° La quatriéme proportionelle à la ſurface de la Lunule, à celle du ſegment, & à la ligne HG, qui ſera GI. Fig. 91. Fig. 92.

On pourra de même déterminer le centre de gravité d'une partie de Parabole renfermée entre deux ordonnées, comme MNHS. Car ayant déterminé le centre O de la grande Parabole SAH, de même que celui de Fig. 93.

la petite MAN qui soit en F, la quatriéme proportionnelle de l'espace MMHS à la petite parabole MAN, & à la ligne FO sera OK, & par conséquent le centre cherché au point K.

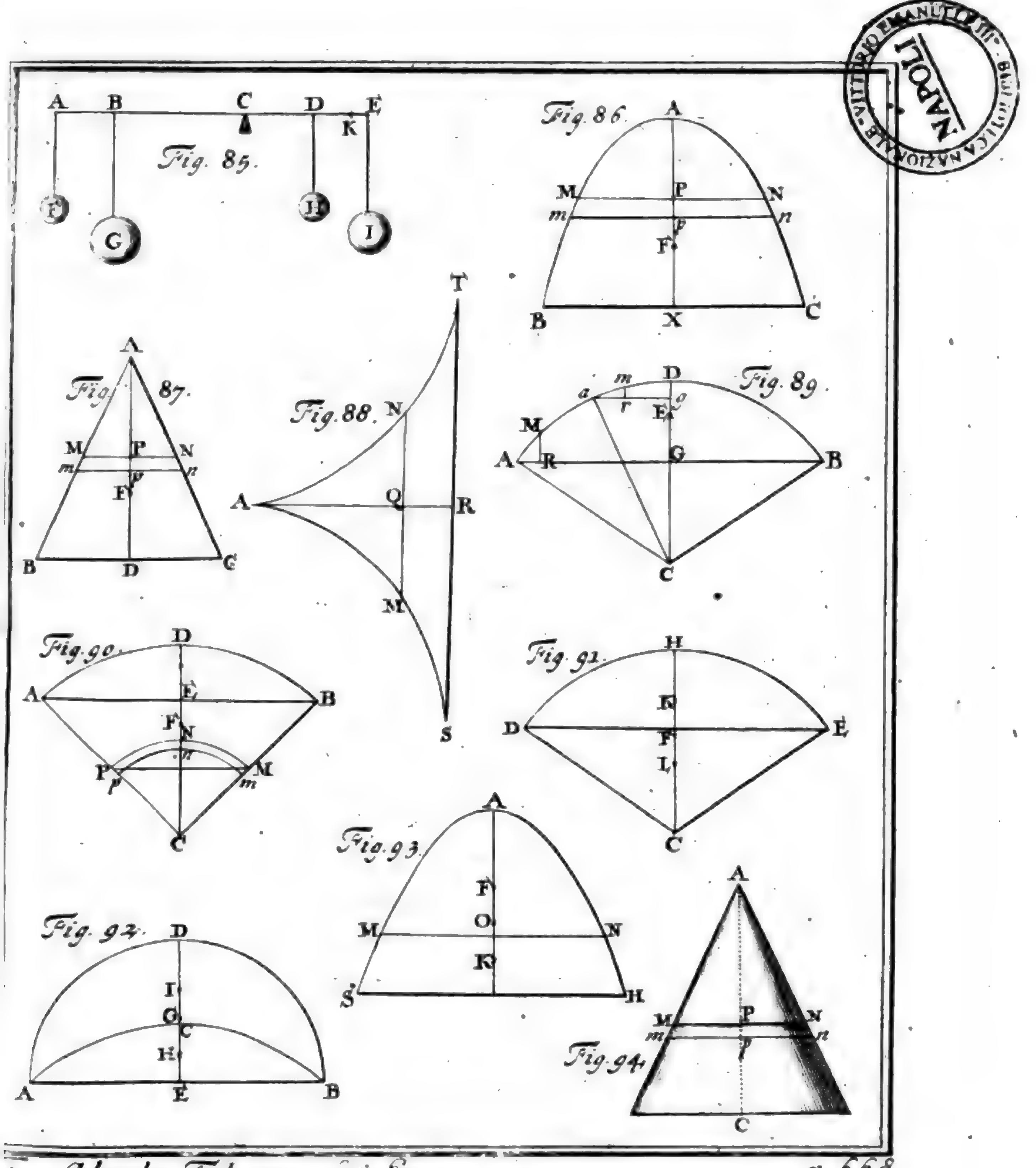
IX. Les centres de gravité des parallelogrammes, & de toutes les figures régulieres sont ceux de leurs figures. Ceux des parallepipedes & des cylindres sont dans le milieu de la ligne, qui joint les centres des deux bases. Ainsi on pourra trouver de même les centres de gravité des Prismes ou especes de Cilindres, qui ont pour base des segmens, des secteurs, ou des Lunules.

Fig. 94. X. Dans le Cone ou dans la Pyramide le centre de gravité est dans l'axe AC, chacun de ses élemens ou petits poids, comme $MNnp = prx^2dx : 2a^2$, & son moment $prx^3dx : 2a^2$; par conséquent la somme de tous les momens $prx^4 : 8a^2$ étant divisé par la somme de tous les Poids $prx^3 : 6a^2$ donne $\frac{3}{4}x = \frac{3}{4}AC$, pour le centre de gravité de tout le Cône. C'est la même chose pour la Pyramide.

Fig. 95. XI. Si dans le Conoide Parabolique ABC, le parametre de la Parabole décrivante $AMB = 1$. l'élement du solide ou le petit poids $MNnm$ sera $= pxdx : 2r$. Donc son moment $= px^2dx : 2r$, ainsi la somme de ces momens qui est $px^3 : 6r$ étant divisé par la somme des poids $px^2 : 4r$, donnera $\frac{2}{3}x = \frac{2}{3}AD$ pour le centre de gravité du Conoide proposé.

XII. L'élement d'un Segment Spherique est $= pxdx - px^2dx : 2r$; donc son moment $= px^2dx - px^3dx : 2r$, dont la somme $\frac{1}{3}px^3 - px^4 : 8r$. divisée par la somme

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google

des poids $\frac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r$ donne pour la diſtance, depuis le ſommet au centre de gravité $12r \times \overline{8rpx^3 - 3px^4} : 24 \times \overline{6rpx^2 - 2px^3} = \overline{8rx - 3x^2} : \overline{12r - 4x} \;\therefore\; 3r - x : 2r - \frac{2}{4}x$, comme l'abſciſſe x eſt à la diſtance entre le centre de gravité & le ſommet. Si à la place de x on ſubſtituë r ou le demi diametre de la Sphere, la diſtance du centre de gravité, depuis le ſommet ſera dans la demi Sphere $\overline{8r^2 - 3r^2} : \overline{12r - 4r} = \frac{5}{8}r$, & enfin ſubſtituant $2r$ à la place de x, on aura le centre de gravité de la Sphere au centre de la figure.

XIII. Pour trouver le centre d'un Cone tronqué comme BMND, il faut chercher, 1.° Le centre de gravité du Cone retranché AMN qui ſoit F. 2.° Le centre de gravité de tout le Cone ABD qui ſoit G. 3.° La quatriéme proportionelle au Cone tronqué BMND, au Cone retranché AMN & à FG, qui donnera GH. *Fig.* 96.

XIV. Nous avons vû dans la Méchanique, que pour déterminer le centre d'Oſcillation ou de percuſſion de pluſieurs poids, attachés à une verge inflexible & ſuppoſée ſans peſanteur, il faut multiplier chaque poids par le quarré de ſa diſtance au centre de ſuſpenſion, & diviſer la ſomme de tous ces produits par la ſomme des momens deſdits poids, c'eſt à-dire, par la ſomme deſdits poids, multipliés chacun par ſa diſtance audit centre de ſuſpenſion. Or conſiderant l'ordonnée MN, multipliée par la differentielle Pp, c'eſt-à-dire, ydx comme un poids, on le multipliera par le quarré de AP, ce qui donnera $xxydx$, pendant que ledit poids ydx, multiplié par la ligne AP, donne pour le moment dudit poids $xydx$. Ainſi on aura par la nature du préſent calcul, S. x^2ydx : *Fig.* 86.

Digitized by Google

S. $xydx$ pour formule génerale de la détermination de ce centre de Balancement ou d'Oscillation. Où on introduira la valeur de y en x, selon la nature de chaque question. Ceci donnera aisément le centre d'Oscillation d'une ligne droite ou d'un cylindre, de même que celui des surfaces, telles que sont le parallelogramme rectangle, le triangle Isoscele, la Parabole, &c. suspendus, ou immédiatement par leur sommet, ou à un fil supposé sans pesanteur, & d'une longueur donnée, ou même lorsque ces sortes de surfaces sont suspenduës par leurs bases. Cependant il faut supposer en même tems qu'elles balancent de face. Car si ces figures balançoient de côté, ou qu'il y eût un solide qui balançat, il arrive que les points, qui répondent à une même abscisse, sont differemment distants du point de suspension, & qu'ils ont par conséquent differentes vitesses, ce qui donne un calcul bien plus composé pour la détermination de la formule. M. de l'A. R. S. 1703, p. 272. *sqq.*

CHAPITRE SEPTIEME.

De l'Usage du Calcul Integral dans la Méthode Inverse des Tangentes.

I. LA Tangente ou quelqu'une des lignes, dont la détermination dépend de la Tangente, étant donnée, la maniere de trouver par là l'équation de la Courbe ou sa construction s'appelle la Méthode Inverse des Tangentes. Or les équations differentielles des Tangentes, Soutangentes, Perpendiculaires, Souperpendiculaires, &

des surfaces des Courbes ayant été donné ci-dessus on n'a qu'à égaler la valeur donnée à l'expression differentielle, ce qui étant fait on pourra ou trouver l'integrale ou faire la construction pour trouver la Courbe cherchée. Voici des exemples.

II. Trouver une Courbe dont la Soutangente $= 2yy : a$. Puisque la Soutangente de toute ligne Algebrique est $ydx : dy$, on aura :

$$ydx : dy = 2y^2 : a$$
$$aydx = 2y^2 dy$$
$$adx = 2ydy$$
S. $$ax = y^2$$ Donc c'est la Parabole.

III. Trouver la Courbe dont la Souperpendiculaire est égale à une constante a. Puisque la Souperpendiculaire de toute Courbe algebrique est $ydy : dx$ on aura :

S. $$ydy = adx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = ax$$
$$y^2 = 2ax.$$ C'est une Parabole; dont le Parametre $= 2a$.

IV. Trouver une Courbe dont la Souperpendiculaire $= r - x$.

$$ydy : dx = r - x$$
$$ydy = rdx - xdx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = rx - \tfrac{1}{2}x^2$$
$$y^2 = 2rx - x^2$$ C'est le Cercle dont le rayon $= r$.

V. Trouver la Courbe dont la Soutangente est troisiéme proportionelle à $r - x$ & y.

Puisque $r - x : y = y : \frac{y\,dx}{dy}$

$$r - x : y = dy : dx$$

$$r\,dx - x\,dx = y\,dy$$

$$rx - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2$$

$$2rx - x^2 = y^2.$$ C'est encore le Cercle.

VI. Trouver la Courbe dont la Soutangente est troisiéme proportionelle à $r + x$ & y. Puisque

$$r + x : y = y : \frac{y\,dx}{dy}$$

$$r + x : y = dy : dx$$

$$r\,dx + x\,dx = y\,dy$$

$$rx + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2$$

$$2rx + xx = y^2.$$ C'est l'Hyperbole Equilatere dont les Axes conjugués & le Parametre $= 2r$.

VII. Trouver une ligne dans laquelle la Soutangente est égale à la demi-ordonnée

$y\,dx$

$$y\,dx : dy = y$$

$$y\,dx = y\,dy$$

$$dx = dy$$

$x = y$ Donc la ligne eſt l'hypotenuſe du triangle rectangle iſoſcele. Mais ſi x eſt un arc de Cercle, la ligne cherchée ſera la Cycloide.

VIII. Trouver la Courbe dont la Souperpendicnlaire $= \sqrt{ax}$. Puiſque $y\,dy : dx = \sqrt{ax}$

$$y\,dy = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\tfrac{1}{2} y^2 = \tfrac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$$

$$y^2 = \tfrac{4}{3}\sqrt{ax^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{4ax^3}$$

D'où il eſt évident que dans cette Courbe les quarrés des demi-ordonnées expriment les eſpaces de la Parabole, dont le Parametre $= 4a$; par conſéquent les demi-ordonnées ſont moyennes proportionelles entre les abſciſſes & les $\frac{2}{3}$ des demi-ordonnées de la Parabole dècrite autour du même axe. Cette Courbe peut être appellée la quadratrice de la Parabole. Car on appelle quadratrice d'une Courbe une ligne à l'entour du même axe, dont les demi-ordonnées étant connuës on connoit les eſpaces correſpondans de l'autre, par exemple, ſi dans le préſent cas APMA $= \overline{PN}^2$ ou AP $\times$ PN, *Fig.* 97.

Digitized by Google

ou PN $\times a$, la Courbe AND sera là quadratrice de la Courbe AMC.

IX. Trouver la Courbe dont l'aire s'exprime par $a\sqrt{x}$

$$\frac{1}{2} a x^{-\frac{1}{2}} dx = y dx \mid \frac{1}{2} a x^{-\frac{1}{2}} = y$$

$$\frac{1}{4} a^2 x^{-1} = y^2 = \frac{1}{4} a^2 : x$$

$$x y^2 = \frac{1}{4} a^2$$

Cette Courbe est donc une seconde Hyperbole entre les asymptotes; & puisque $\sqrt{x}$ est la demi ordonnée de la Parabole ordinaire, dont le Parametre $= 1$. il est évident que la Parabole est la quadratrice de l'Hyperbole entre les asymptotes, dans lequelle $xy^2 = \frac{1}{4} a^2$.

X. Trouver la Courbe dont la quadrature est $x^3 : a$.

On aura $x^3 : a = S.\, y dx$

$$3x^2 dx : a = y dx$$

$$x^2 = \frac{1}{3} a y.$$

Cette Courbe est la Para-

Fig. 98. bole extérieure, à laquelle $AQ = PM = x$, $QP = AM = y$, le parametre $= \frac{1}{3}$ a.

XI. Trouver la Courbe dont l'aire est $a\sqrt{aa+xx}$.

$$ax\,dx : \sqrt{aa+xx} = y\,dx$$

$$ax : \sqrt{aa+xx} = y$$

$$a^2x^2 : \overline{aa+xx} = yy$$

$$a^2 : \overline{aa+xx} = y^2 : x^2$$

Cette analogie détermine la nature d'une Courbe, dont la quadratrice est l'Hyperbole équilatere, dont les axes conjugués & le Parametre $= a$.

XII. Trouver la Courbe dont l'aire $= x\sqrt{a^2+x^2}$ Puisque $\frac{x^2dx}{\sqrt{aa+xx}} + dx\sqrt{a^2+x^2} = ydx$

on aura $\frac{2x^2+a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} = y$

$$\overline{2x^2+a^2}^2 = y^2 \times \overline{a^2+x^2}$$

Donc $y^2 : a^2+2x^2 = a^2+2x^2 : a^2+x^2$. Cette analogie détermine de même la nature d'une Courbe dont la quadratrice est l'Hyperbole équilatere. On voit par ces exemples que la quadratrice étant donnée on trouve facilement la ligne quarrable; & par cette méthode on peut trouver des Courbes quarrables à l'infini, & construire des Tables de ces Courbes, ou ce qui est la même chose des formules de grandeurs Intégrables.

CHAPITRE HUITIEME.

De l'Usage du Calcul Intégral dans la construction des Logarithmes.

I. TRouver la Courbe dont la Soutangente est la constante a. On aura donc:

Digitized by Google

$$y\,dx : dy = a$$

$$dx = ay^{-1}dy$$

Par conséquent $S.\ dx = x = S.\ ay^{-1}dx$

Fig. 99. Soit donc l'Hyperbole BCc, & ses asymptotes AD, AF, dans laquelle AD $=$ AE $= a$, AF $= y$, F$f = dy$, FC $= x$, puisque le rectangle AF, FC $= \overline{AE}^2$ ∴ $aa = xy$; par conséquent $a^2 : y = x$. Mais x, dy est l'élement de l'espace Hyperbolique entre les asymptotes : Donc $xdy = a^2\ y^{-1}dy$, par conséquent tout l'espace Hyperbolique étant divisé par a, sera $= a\ S.\ y^{-1}dy$. D'où il est évident que la construction de cette Courbe dépend de la quadrature de l'Hyperbole. Nous avons vû ci-dessus que cette Courbe dont la Soutangente est une constante est la Logarithmique ; mais puisque dans cette courbe l'abscisse prise sur son asymptote est le Logarithme de son appliquée correspondante ∴ $x = ly$, il est évident que la Soutangente supposée $= a$, on aura $S.\ ay^{-1}dy = S.\ ady : y = ly$. Et de cette maniere on peut trouver facilement la differentielle d'un Logarithme, ou d'une grandeur, où le Logarithme entre ; car puisque $ady : y = dly$, on aura aussi $dly^n = n\ ly^{n-1}ady : y$. a étant la Soutangente de la Logarithmique.

Fig. 100. II. Trouver le Logarithme d'un nombre donné. Soit AB l'appliquée de la Logarithmique MBN $= 1 =$ à la Soutangente constante, alors PM sera un nombre plus grand que l'unité, QN un autre plus petit que l'unité & AP le Logarithme du premier, AQ le Logarithme du second. Or la difference entre AB & PM étant y, PM sera $1 + y$. Par conséquent AP, qui est le Logarithme d'un nombre

plus grand que l'unité sera S. $dy:\overline{1+y}$; mais $1:\overline{1+y}$ fait $1-y+y^2-y^3+y^4$, &c. à l'infini, donc $dy:\overline{1+y}$ $=dy-ydy+y^2dy-y^3dy+y^4dy$, &c. à l'infini, par conséquent S. $dy:\overline{1+y}=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$, &c. à l'infini.

III. Si le nombre est moindre que l'unité comme QN, soit sa difference à l'unité $=y$; par conséquent QN$=1-y$, on trouvera selon ce que dessus, son Logarithme $=\mp y\mp\frac{1}{2}y^2\mp\frac{1}{3}y^3\mp\frac{1}{4}y^4$, &c. On sçait d'ailleurs que le Logarithme d'un nombre moindre que l'unité & celui de son réciproque plus grand que l'unité sont égaux; & puisque les termes de la formule doivent aller en diminuant on se servira de la seconde formule, en mettant le nombre représenté par $\frac{1}{1+y}$ à la place de $1-y$, c'est-à-dire, on mettra $-\frac{y}{1+y}$ à la place $-y$. Car $\frac{1}{1+y}=1-\frac{y}{1+y}$.

IV. Pour comparer ces Logarithmes Hyperboliques avec ceux des Tables ordinaires on remarquera, que dans les Tables le Logarithme de 10 est l'unité avec un certain nombre de zéros, celui de 100. est 2. celui de 1000. est 3. avec le même nombre de zéros. Or le Logarithme Hyperbolique de 10 étant 2, 30258509, &c. On peut trouver les Logarithmes des Tables par une régle de trois, en disant: le Logarithme de 10 est au Logarithme de 10 de la Table comme tel autre Logarithme Hyperbolique d'un certain nombre donné est à celui de la Table du même nombre.

V. Etant donné le Sinus d'un arc on trouvera son Logarithme en supposant le Rayon $= 1$, le Sinus du complement $= x$; par conséquent le Sinus sera $= \sqrt{1 - xx}$ $= \sqrt{\overline{1 + x}\,,\,\overline{1 - x}}$;

$l.\ \overline{1 + x} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$, &c. &

$l.\ \overline{1 - x} = - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$

Donc $l.\ \overline{1 - xx} = \quad - \frac{2}{2}x^2. \quad - \frac{2}{4}x^4 \quad - \frac{2}{6}x^6$, & par conſ

$l.\ \sqrt{1 - xx} = \quad - \frac{1}{2}x^2 \quad - \frac{1}{4}x^4 \quad - \frac{1}{6}x^6$, &c.

VI. La Tangente d'un angle de 45° étant égale au Rayon, si on suppose celui-ci $= 1$ il est évident que la Tangente d'un arc plus grand que 45° sera $1 + x$. & celle d'un arc moindre que 45° $1 - x$; par conséquent le Logarithme dans le premier cas sera $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, &c. & dans le second cas $- x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, &c. à l'infini.

SECONDE PARTIE.

TROISIEME SECTION.

Du Calcul Exponentiel.

CHAPITRE PREMIER,

De la Nature du Calcul Exponentiel.

I. ON appelle une grandeur Exponentielle, lorsqu'elle a un Exposant variable, comme

$x^x \quad a^x \quad v^{x^y} \quad x^{x^x} \quad y^{y^y}$, &c. On applique le Calcul

Differentiel & Intégral à ces ſortes de grandeurs par le moyen des expreſſions Logarithmiques; dont voici les principales, qui ſont fondées ſur les proprietés des Logarithmes : $dlx = dx : x$. $lx + la = l.\,ax$. $lx - la = l.\,\frac{x}{a}$. $ml\,x = l.\,x^m$. $\frac{1}{n}l.\,x = l.\,x^{1:n}$, &c.

II. Ainſi une grandeur Exponentielle étant donné, dont on demande la difference, on la ſuppoſera d'abord égala à une grandeur ſimple, & prenant les Logarithmes de part & d'autre & leurs valeurs, on viendra enfin à une équation qui marque la difference cherchée. Par exemple

$$x^y = z$$

$$y\,l.\,x = l\,z$$

$$l.\,x,\,dy + y,\,dx : x = dz : z$$

$$z\,l.\,x,\,dy + zy,\,dx : x = dz$$

$$x^y\,l.\,x,\,dy + y\,x^{y-1}\,dx = dz$$

Si la grandeur Exponentielle eſt du ſecond degré, ſoit

$$v^{x^y} = z$$

$$x^y\,l.\,v = l\,z$$

$$\overline{x^y\,l.\,x\,dy + y\,x^{y-1}\,dx} \times l.\,v + x^y\,dv : v = dz : z$$

$$z \times \overline{x^y\,l.\,x\,dy + y\,x^{y-1}\,dx} \times l.\,v + z\,x^y\,dv : v = dz$$

$$v^{x^y} \times \overline{x^y\,l\,x\,dy + y\,x^{y-1}\,dx} \times l.\,v. + v^{x^y}\,v^{-1}\,x^y\,dv = dz$$

$$v^{x^y}\,x^y\,l.\,x\,l\,v\,dy + v^{x^y}\,y\,x^{y-1}\,l.\,v\,dx + v^{x^y}\,v^{-1}\,x^y\,dv = dz$$

Digitized by Google

III. Pour trouver l'Integrale de la Differentielle d'une grandeur Exponentielle , par exemple, $x^x dx$ dont on cherche l'integrale ; on supposera

$$x = 1 + y$$

ce qui donnera $lx = l.\overline{1+y}$

& $dx = dy$

Par conséquent $x^x dx = x, lx, dx = \overline{1+y}. l. \overline{1+y}, dy$, mais $l. \overline{1+y} = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$, &c. à l'infini. Donc l'operation faite on aura :

$$l. \overline{1+y}, \overline{1+y}. dy = y\,dy + \frac{1}{2}y^2 dy - \frac{1}{6}y^3 dy + \frac{1}{12}y^4 dy - \frac{1}{20}y^5 dy, \text{ \&c.}$$

par conséquent,

$$S. x^x dx = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{60}y^5 - \frac{1}{120}y^6, \text{ \&c.}$$

$$= \frac{y^2}{0,1,2,} + \frac{y^3}{1,2,3,} - \frac{y^4}{2,3,4,} + \frac{y^5}{3,4,5,} - \frac{y^6}{4,5,6,}, \text{ \&c.}$$

Dans laquelle suite $y = x - 1$.

Nous ne pouvons point nous étendre sur d'autres méthodes qui supposent le retour des suites, qu'il auroit été trop long de donner dans ces Principes.

IV. On construit une Courbe Exponentielle en réduisant l'expression Exponentielle à une Logarithmique, que l'on peut représenter par les abscisses de la Logarithmique. Soit, par exemple, à construire une Courbe Exponen-
Fig. 101. tielle , à laquelle $x^x = y$, on aura $x\,lx = ly$. Ainsi supposant décrite la Logarithmique MBN , dont la demi ordonnée AB = 1, soit PM = x, AP sera = lx. Mais $1 : l.x = x : l.y$, moyennant quoi on pourra trouver ly laquelle étant AH, on aura HI = y, d'où on pourra déterminer chaque point G de la Courbe Exponentielle de la maniere suivante.

te. Faites AC $= x$, tirez MC parallele à AP, qui coupera la Logarithmique en M. Et MC $=$ AP $= lx$; faites CD $=$ AB $= 1$, DE $=$ AC, tirez LE parallele à MC, & vous aurez LE $= ly$; tirez LH parallele à EA; & vous aurez HI $= y$. Or prenant AC pour l'axe de la Courbe Exponentielle, si vous faites CG $=$ HI, le point G sera à la Courbe cherchée. De plus par la nature de la Logarithmique $x = 0$, on aura aussi $ly = 0$, puisque x est le Logarithme de y; mais 0 est le Logarithme de l'unité; donc y en ce cas $= 1 =$ AB; par conséquent faisant AF $=$ AB, le point F sera à la Courbe Exponentielle. Pareillement au cas de AB $= 1 = x$; $lx = 0$, donc faisant l'appliquée BK $= 1 =$ AB, le point K sera aussi à ladite Courbe.

CHAPITRE SECOND

Contenant des Problêmes qui font voir l'Usage du Calcul Exponentiel, pour trouver les Proprietés des Courbes Exponentielles.

I. Trouver la Soutangente de la Courbe à laquelle $a^x = y$. Puisque

$$a^x = y$$

$$x\,la = ly$$

$$la\,dx = dy : y$$

$$dx = dy : y\,la$$

Donc $y\,dx : dy = y\,dy : y\,la\,dy = 1 : la$.

Fig. 102. Conſtruction. Soit une Logarithmique quelconque MBN, à laquelle AB $=1$, faites AC$=a$, & tirez CM & MP paralleles aux deux lignes AP, AC, vous aurez PM$=$ AC $=a$, & AP $= la$, faites de plus PQ $=$ AB $=1$, & QT parallele à AB, vous aurez QT$=1:la$. Or la Soutangente de cette Courbe étant la conſtante $1:la$. il eſt évident que l'équation propoſée eſt à une Logarithmique.

Fig. 103. II. Quarrer l'eſpace non terminé de la Logarithmique HPMI. Soit la Soutangente de la Logarithmique PT $=1:l.a$. PM$=y$. P$p$$=dx$. On aura:

$$a^x = y$$

$$x\,l\,a = l\,y$$

$$l\,a\,d\,x = d\,y : y$$

$$d\,x = d\,y : y\,l\,a$$

$$y\,d\,x = y\,d\,y : y\,l\,a = d\,y : l\,a$$

$$S. \quad y\,d\,x = \quad y : la = y \times \overline{1 : la} = \text{PM,PT.}$$

Ainſi cet eſpace eſt double du triangle TPM, renfermé entre la Soutangente, la Tangente & la demi-ordonnée. De plus, puiſque HPMI $=$ PM, PT. & HQSI $=$ SQ, PT, on aura l'eſpace fini QPMS $=$ $\overline{\text{PM}-\text{SQ}}$, PT.

Fig. 103. III. Cuber le Solide infini HPMI, formé par la révolution de la Logarithmique à l'entour de l'aſymptote PH.

Puiſque $d\,x = d\,y : y\,l.\,a.$ on aura

$$p\,y^2\,d\,x : 2\,r = p\,y^2\,d\,y : 2\,r\,y\,l\,a = q\,y\,d\,y : 2\,r\,l.\,a.$$

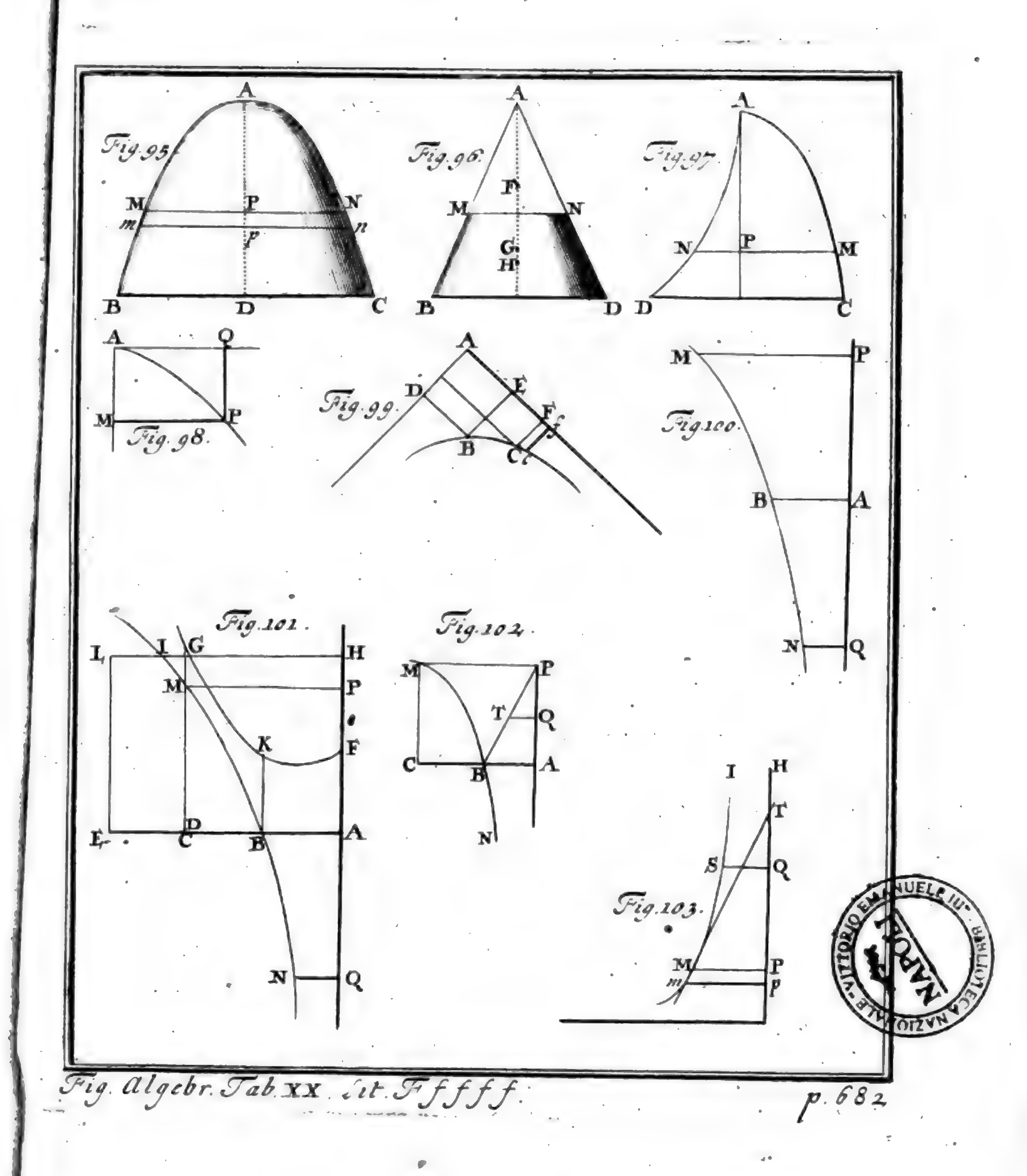
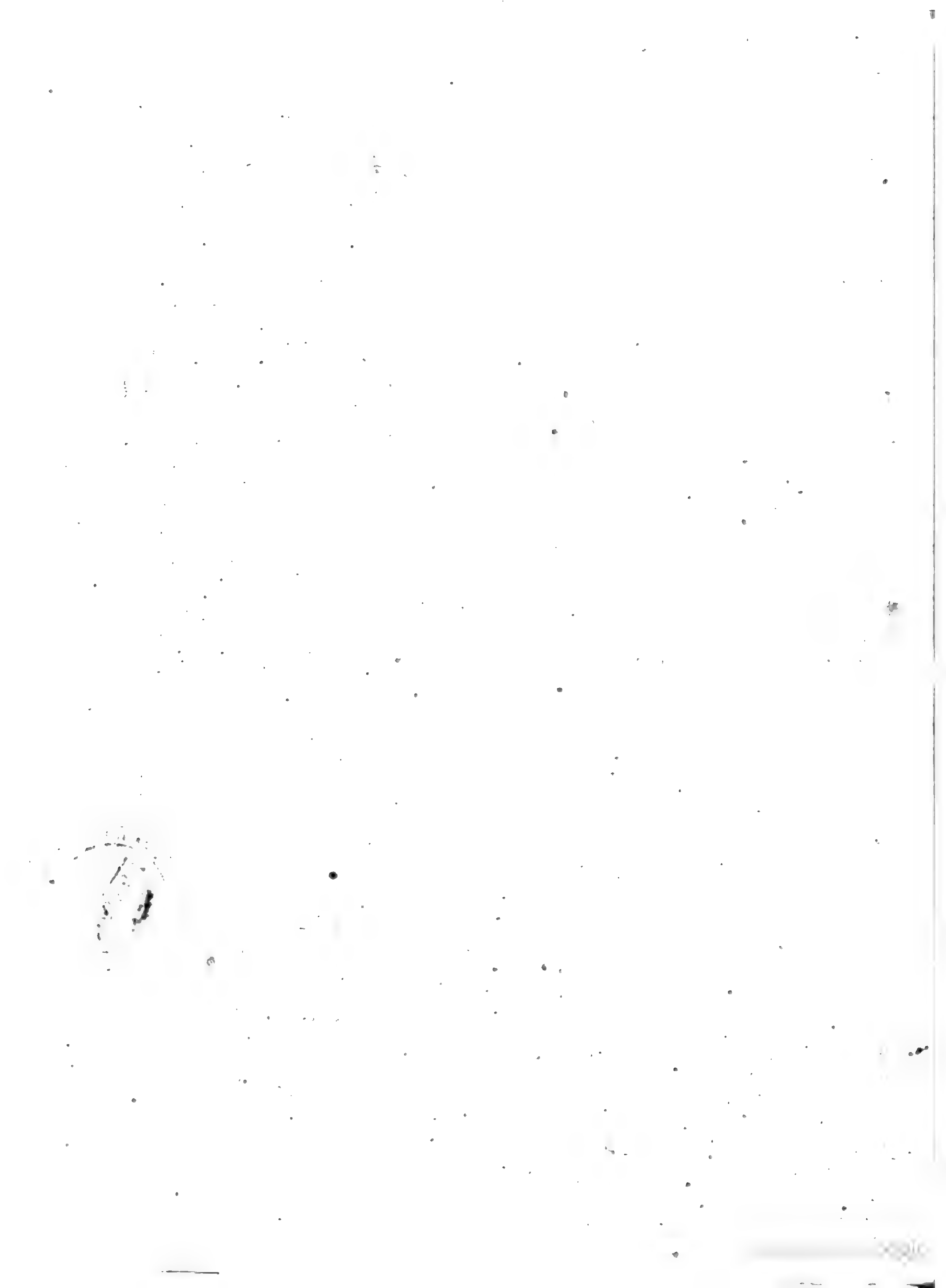


Fig. Algebr. Tab. XX. lit. Fffff.

p. 682

BIBLIOTECA NAZIONALE · VITTORIO EMANUELE III · NAPOLI



S. $py^2 dx : 2r = py^2 : 4rla$.

Mais le Cone décrit par la révolution du triangle PMT étant $= py^2 : 6rla$. Le Solide proposé est à ce Cone $\therefore : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 3 : 2$.

IV. Déterminer la Souperpendiculaire de la Logarithmique.

Puisque $ladx = dy : y$

$$dy = yladx$$

$$ydy : dx = y^2 ladx : dx = y^2 la = y : \frac{1}{la}.$$

Donc la Souperpendiculaire est troisiéme proportionelle à la Soutangente PT $= 1 : la$, & à là demi ordonnée PM. Ainsi décrivant une Parabole dont le Parametre soit égal à la Soutangente de la Logarithmique, les demi ordonnées de la Parabole seront égales à celles de la Logarithmique; mais les abscisses de la Parabole seront égales aux Souperpendiculaires de la Logarithmique. Fig. 103.

V. Déterminer la Soutangente de la Courbe Exponentielle à laquelle $x^x = y$

Puisque $xlx = ly$. on aura

$$lxdx + xdx : x = dy : y$$

$$ylxdx + ydx = dy.$$

Donc $ydx : dy = ydx : \overline{ylxdx + ydx} = 1 : \overline{lx + 1}$

Ainsi CT est troisiéme proportionelle à AB + AP $= 1 + lx$, & AB $= 1$. Fig. 104.

VI. Déterminer la Souperpendiculaire de la Courbe à laquelle $x^x = y$ Puisque $ylxdx + ydx = dy$. on aura la Souperpendiculaire $ydy : dx = \overline{y^2 lxdx + y^2 dx} : dx = y^2 lx + y^2 = y^2 \times \overline{lx + 1}$.

Fig. 104. Ainsi on cherchera à AB $=1$, & CG $=y$. la troisiéme proportionelle $=y^2$. Et ensuite à AB $=1$, AB $+$ AP $=1+lx$, & la ligne trouvée y^2 la quatriéme proportionelle.

Fig. 105. VII. Déterminer la moindre appliquée SR de la Courbe Exponentielle à laquelle $x^x=y$. Soit

$$ylx\,dx+y\,dx=dy=0. \quad \text{on aura}$$
$$lx+1=0$$
$$1=-lx.$$

Ainsi faisant AT $=$ AB $=1$, on aura TV $=$ AR $=x$ & si à la place de lx, on substituë dans l'équation de la Courbe $xlx=ly$, sa valeur -1 qu'on vient de trouver, on aura $x=-ly$. Soit donc AQ $=$ VT $=-x$, & NQ sera $=y$.

VIII. Quarrer la Courbe Exponentielle à laquelle $x^x=y$. Puisque l'element de l'aire de chaque Courbe est ydx. celle de la Courbe proposée sera S. $x^x dx=$ S. $xlxdx$, & supposant $1+v=x$, on aura S. $xlxdx=$

$$\frac{v^2}{0,1,2}+\frac{v^3}{1,2,3}-\frac{v^4}{2,3,4}+\frac{v^5}{3,4,5}-\frac{v^6}{4,5,6}, \&c.$$

IX. Trouver l'Equation de la Courbe dont la Soutangente est $=1:\overline{1+lx}$.

Puisque $1:\overline{1+lx}=y\,dx:dy$

$$dy=y,\overline{1+lx},dx$$
$$dy:y=dx+lx\,dx$$
$$\text{S. } dy:y=ly=\text{S. }\overline{dx+lxdx}=xlx$$
$$ly=xl.x$$
$$y=x^x$$

X. Trouver l'equation à la Courbe dont la Souperpendiculaire $= y^2 \times \overline{l.x+1}$.

Puisque $y^2, \overline{lx+1} = y\,d\,y : d\,x$. on aura

$$y^2, \overline{lx+1}, d\,x = y\,d\,y$$

y^2

$$\overline{lx+1}, d\,x = d\,y : y.$$

S.

$$x\,l\,x = l\,y.$$

$$x^x = y$$

XI. Trouver l'équation à la Courbe dont la Souperpendiculaire est $y^2 l\,a$. Puisque

$$y^2\,l\,a = y\,d\,y : d\,x.$$ on aura

$$y^2\,l\,a\,d\,x = y\,d\,y$$

y^2

$$l\,a\,d\,x = d\,y : y$$

S.

$$x\,l\,a = l\,y$$

$$a^x = y.$$ Ainsi c'est la Logarithmique ordinaire.

XII. Trouver l'équation de la Courbe dont la surface est $\overline{2\,x^2\,l\,x - x^2} : 4\,l\,a$.

On aura $4\,x\,l\,x\,d\,x + 2\,x\,d\,x - 2\,x\,d\,x : 4\,l\,a = y\,d\,x$

$$x\,l\,x = y\,l\,a$$

$$x^x = a^y$$

Cette Courbe se construit par le moyen de la Logarithmique ordinaire. Soit pour cet effet la Logarithmique MBN, à laquelle AB $= 1$, prolongez AB à l'infini. Prenez AD $= a$, AC $= x$, & tirez les lignes DI & CM paralleles à AP, de même que HI & PM paralleles à AC & vous aurez DI $=$ AH $= l\,a$, & CM $=$ AP $= l\,x$, Fig. 106.

faites ensuite AF $=$ AH, & tirez FE parallele à AP, qui rencontre PM en E. Tirez par A & E la droite AG, qui rencontrera CM prolongé en G; & vous aurez CG $= xlx : la = y$; par conséquent ce point G sera à la Courbe cherchée; d'où on pourra conclure que puisque

$$lxdx + dx = lady$$

$$dx = lady : \overline{lx+1}$$

$$ydx : dy = yla : \overline{lx+1}$$

Par conséquent la Soutangente de cette Courbe Exponentielle est la quatriéme proportionelle à AB $+$ AP, CG, & la constante AH.

De plus puisque $\overline{lxdx+dx} : la = dy$, on aura $ydy : dx = y, \overline{lx+1} : la$, par conséquent la Souperpendiculaire de cette même Courbe est quatriéme proportionelle à AH, AB $+$ AP, & CG.

Donc la Soutangente est à la Souperpendiculaire :: $\frac{yla}{lx+1} : y\frac{\overline{lx+1}}{la} = la^2 :: \overline{lx+1}^2$. ou comme le quarré de la constante AH est au quarré de la ligne composée de la constante AB & de la changente AP.

SECONDE PARTIE.

QUATRIEME SECTION,

Du Calcul des Secondes Differences.

CHAPITRE PREMIER.

De la Nature de ce Calcul.

Fig. 107. & 108. I. NOus avons vû cy-dessus que si sur l'axe AB d'une Courbe on conçoit une partie infiniment petite B*b*, qui est la differentielle de l'abscisse $= dx$, alors Dc

ſera la differentielle de la demi ordonnée $=dy$, & Cc, quoique partie de la Courbe, peut être pris à cauſe de ſon infinie petiteſſe pour une partie de la Tangente TG. Si à préſent on conçoit une ſeconde difference d'abſciſſe *bb*, égale à la premiere, la difference de la ſeconde demi ordonnée *de* ſera plus petite que la difference de la premiere, au cas que la Courbe tourne ſa concavité vers l'axe; & elle ſera plus grande lorſque la Courbe tourne ſa convexité vers ledit axe; ce qui ſe voit aiſément par la production de la Tangente Cc vers G; ainſi la partie *ce* eſt la difference de Dc à *de*. Mais Dc étant elle-même une difference, il s'enſuit que *ce* eſt une difference de difference ou une ſeconde difference, ou ce qui eſt la même choſe un infiniment petit du ſecond genre. On pourroit de la maniere paſſer à des troiſiémes differences & autres. On marque ces ſecondes differences en redoublantla lettre *d*, ainſi $d(dx) = ddx = d^2x$. $d(d^2x) = dddx = d^3x$, &c.

II. Les produits des differences du premier genre, multipliées enſemble ſont auſſi des differences du ſecond genre, &c. Elles ſe marquent de cette maniere $dx \times dx = dx^2$. $dx^2 \times dx = dx^3$. $dx \times dy = dydx$. Car ſi à une grandeur finie, comme 1, & à une infiniment petite du premier genre, comme dy, on cherche une troiſiéme proportionelle, qui ſera dy^2. Il eſt évident que la ſeconde étant infiniment petite par rapport à la premiere, la troiſiéme ſera auſſi infiniment petite par rapport à la ſeconde.

III. On ſe ſert pour exprimer ces grandeurs differentielles du ſecond genre des mêmes régles, que dans le Calcul des differences premieres. Voici quelques exem-

ples, que nous éclaircirons par le moyen de la Substitution. Soit à chercher la differentielle de xdx, on supposera d'abord,

$$x\,dx = v$$

$$dx = v : x$$

$$d^2x = \overline{x\,dv - v\,dx} : x^2$$

$$x^2\,d^2x = x\,dv - v\,dx$$

$$v\,dx + x^2\,d^2x = x\,dx^2 + x^2d^2x = x\,dv$$

$$dx^2 + x\,d^2x = dv$$

Pour trouver la differentielle de $x : dx$. Soit

$$x : dx = v$$

$$x = v\,dx$$

$$dx = v\,d^2x + dx\,dv$$

$$dx - v\,d^2x = dx\,dv$$

$$dx - \overline{x\,d^2x : dx} = \overline{dx^2 - x\,d^2x} : dx = dx\,dv$$

$$\overline{dx^2 - x\,d^2x} : dx^2 = dv$$

Pour trouver la differentielle de dx^2 Soit

$$dx^2 = v$$

$$dx = v : dx$$

$$d^2x = \overline{dx\,dv - v\,d^2x} : dx^2$$

$$dx^2\,d^2x = dx\,dv - v\,d^2x$$

$$v\,d^2x + dx^2\,d^2x = dx\,dv$$

$$dx^2\,d^2x + dx^2\,d^2x = dx\,dv$$

$$2\,dx^2d^2x = dv.$$

IV. S'il n'y a que des grandeurs differentielles, dont il faut prendre la difference, on les considere comme des grandeurs ordinaires, & les circonstances particulieres du Problême proposé feront juger, laquelle de ces premieres differences on doit considerer comme une grandeur constante; après quoi l'operation se fait suivant les régles ordinaires. Soit, par exemple, dans $1:dx$ la grandeur constante 1; la differentielle sera $-d^2x:dx^2$. De même dans $ydy:dx$, si on suppose dx constante, on aura $d(ydy:dx) = \overline{dy^2 + yd^2y}:dx$, au lieu que si dans la même grandeur $ydy:dx$, on suppose dy constante on aura $d(ydy:dx) = dxdy^2 - ydyd^2x:dx^2$.

CHAPITRE SECOND.

De l'Usage de ce Calcul pour déterminer le Point d'Inflexion ou celui de Rebroussement des Courbes.

I. Lorsqu'une Courbe ayant tourné sa concavité vers son axe change tellement de direction, qu'elle y tourne ensuite sa convexité, le point, où cette Direction change, s'appelle le Point d'Inflexion. Mais si la Courbe retourne vers son origine, le point, où se fait ce retour, s'appelle le Point de Rebroussement.

II. Soient deux Courbes AMS, dont l'une tourne sa concavité vers l'axe, au lieu que l'autre y tourne sa convexité; soit tirée la Tangente TM, la demi ordonnée PM, & ses infiniment proches *pm* & QS, & soit P*p* = *p*Q, c'est à-dire, *dx* constante. Si des points M, *m* on tire les Perpendiculaires MR, *mr*, qui sont égales, & dans *Fig.* 109. & 110.

les triangles MmR, mTr, à cauſe des paralleles pm & QS l'angle $m =$ à l'angle T, on aura $mR = rT$; Mais dans le premier cas $rT > rS$, & dans le ſecond cas il eſt $<$. Par conſéquent dans le premier cas la difference des demi-ordonnées dy va toujours en diminuant, au lieu que dans l'autre elle va toujours en augmentant, dx étant ſuppoſé conſtante. Ainſi dans le point d'inflexion au premier cas dy eſt un moindre, au lieu qu'il eſt un plus grand dans le ſecond cas. Donc ddy doit être $= 0$, ou ∞, ſi en ſuppoſant dx conſtante on prend la ſeconde difference de dy. Voici quelques exemples:

Fig. 111. III. Soit une demi roulette allongée AMN, dont la baſe BN ſurpaſſe la demi circonference AQB du cercle generateur, dont le centre eſt C. Il s'agit de déterminer ſur le diametre le Point P, enſorte que l'appliquée PM aille rencontrer la roulette au point d'inflexion M. Soient pour cet effet $AQB = p$, $BN = a$, $AB = 1$, l'abſciſſe $= x$, $PQ = u$, $AQ = z$, $PM = y$. Puiſque

$AQB : BN = AQ : QM$ $\quad$ $PM = PQ + QM$

$p : a = z : \frac{az}{p}$ on aura $y = u + \frac{az}{p}$

qui eſt l'équation à la Courbe; par coſéquent ſa difference $dy = du + adz : p$.

mais $dz = dx : 2\sqrt{x - x^2}$ & à cauſe de $u = \sqrt{x - x^2}$

on aura $du = \overline{dx - 2xdx} : 2\sqrt{x - x^2}$ Donc $dy = \frac{pdx - 2pxdx + adx}{2p\sqrt{x - x^2}}$

Et par conſéquent en ſuppoſant dx conſtante on aura

$$ddy = \frac{-4p\sqrt{x - x^2},\, dx^2 - \frac{p^2 + 4p^2x - ap - 4p^2x^2 + 2apx \times dx^2}{\sqrt{x - x^2}}}{4p^2x - 4p^2x^2} =$$

$$\frac{-4p^2x + 4p^2x^2 - p^2 + 4p^2x - ap - 4p^2x^2 + 2apx \times dx^2}{\overline{4p^2x - 4p^2x^2} \times \sqrt{x - x^2}} =$$

$$\frac{-p^2 - 4p + 2apx \times dx^2}{\overline{4p^2x - 4p^2x^2} \times \sqrt{x - x^2}}$$

$dx^2 \times 2\overline{ax - p - a} : 4p, \overline{x - x^2}, \sqrt{x - x^2}$

Ce qui donne $2ax - p - a = 0$. par conséquent

$$2ax = a + p$$

$$x = \tfrac{1}{2} + \overline{p : 2a}$$

donc $CP = AP - AC = x - \frac{1}{2} = \overline{p : 2a}$

donc $a : \frac{1}{2} = p : CP$

$BN : BC = AQB : CP$. On voit aiséméntque si $BN = AQB$; $CP = BC$; & si $BN < AQB$; BC sera aussi $< CP$. Ainsi la roulette en ce cas n'auroit point d'inflexion.

IV. On peut de même déterminer le point d'inflexion d'une Courbe, dont l'équation est donnée, quoiqu'elle ne soit point décrite. Par exemple, soit l'équation d'une Courbe $ay^2 = x^3 - bx^2$.

Ce qui nous donnera $2ay\,dy = 3x^2\,dx - 2bx\,dx$

$$dy = \frac{3x^2\,dx - 2bx\,dx}{2ay}$$

$$ddy = \overline{12axy\,dx^2 - 4aby\,dx^2 - 6ax^2\,dx\,dy + 4abx\,dx\,dy} : 4a^2y^2 = 0$$

Donc

$$\frac{\overline{12axx - 4aby} \times dx^2 = \overline{6ax^2 - 42bx} \times dx\,dy}{2adx}$$

$$\overline{6xy - 2by} \times dx = \overline{3x^2 - 2bx} \times dy$$

$$\frac{\overline{6x - 2b} \times y\,dx}{3x^2 - 2bx} = dy = \frac{\overline{3x^2 - 2bx} \times dx}{2ay}$$

$$\overline{12x-4b}\ \times 4ayy = \overline{3x^2-2bx}^2$$

$$\overline{12x-4b} \times \overline{x^3-bx^2} = \overline{3x^2-2bx}^2$$

$$12x^4 - 16bx^3 + 4b^2x^2 = 9x^4 - 12bx^3 + 4b^2x^2$$

$$3x^4 - 4bx^3 = 0$$

x^3

$$3x - 4b = 0$$

$$3x = 4b$$

$x = \frac{3}{4}b$. & substituant cette valeur de x dans l'équation donné $ayy = x^3 - bx^2$ on trouvera:

$$ayy = \frac{64}{27}b^3 - \frac{16}{9}b^3 = \frac{16}{27}b^3$$

$$y = 4\sqrt{b^3 : 27a}$$

Fig. 112. & 123. V. Pour déterminer le point d'inflexion dans les Courbes, dont les demi-ordonnées partent du même Point C. Soit la demi-ordonnée CM. & son infiniment proche Cm, la partie mH = Mm; & Tm, la Tangente de la Courbe en M. Puisque les angles CmT & CMm ne different que de la valeur de l'angle infiniment petit MCm ils sont égaux. Mais les demi-ordonnées allant en augmentant l'angle CmH augmente aussi, lorsque la Courbe tourne sa convexité vers C; & au contraire il diminuë lorsqu'elle y tourne sa concavité; par conséquent il est un plus grand ou un moindre au point d'inflexion de la Courbe, auquel le petit arc TH, qui est sa difference = o ou ∞ Pour déterminer ce petit arc TH, vous ferez à la Tangente Tm l'angle TmL = mCL, & décrivant du rayon mH le petit arc HTI, les deux secteurs semblables mCr, ImT donneront:

$$mC : mr = mT : TI$$

$$y : dx = dt : \frac{dtdx}{y}$$

Après quoi décrivant du rayon CH la petit arc HO, les petites droites *mr*, HO étant paralleles, les triangles *o*LH, *m*L*r* rectangles en H & en *r* seront semblables; mais HI étant aussi perpendiculaire à *m*L, le triangle LHI sera semblable au triangle *o*LH, & par conséquent à *m*L*r*. Donc $mL : mr = LH : HI$

$$dt ; dx = -ddy : -\frac{dxddy}{dt}$$

où il faut remarquer 1.° que *m*T & *m*L ne differant que de la partie infiniment petite LI, on les peut prendre pour égales. 2.° Que LH est une grandeur négative, par ce que supposé la demi ordonnée *y*, toujours par ex.croissante, s'il arrive que ses premieres differences allant en augmentant, jusqu'à un certain point, après lequel elles aillent en diminuant, ou au contraire, ce point sera celui d'inflexion, & les secondes differences y deviendront de positives négatives; par conséquent $TI + IH = TH = \frac{dtdx}{y} - \frac{dxd^2y}{dt} = \overline{dt^2dx - ydxd^2y} : ydt$. Donc au cas de $TH = 0$ on aura $yd^2y = dt^2 = dx^2 + dy^2$. Voici un exemple.

VI. Pour trouver le point d'inflexion dans la Conchoide de Nicomede, soit $AB = QM = a$, $BC = b$, $CQ = z$, $CM = y$, $Mr = dx$, on aura $mr = dy$, & $z + a = y$; donc $dz = dy$. De plus $BQ = \sqrt{z^2 - b^2}$, & ayant tiré le petit arc Q*t*, on aura à cause des angles droits *t* & B, & des deux S & Q égaux, puisqu'ils ne different que de Fig. 114.

Digitized by Google

la valeur de l'angle infiniment petit QCS. Les deux triangles ſemblables SQt & BCQ.

Par conſéquent $BQ : BC = St : tQ$.

$$V\overline{z^2 - b^2} : b = dz : \frac{bdz}{V\overline{z^2 - b^2}}$$

Et à cauſe des deux ſecteurs ſemblables CQt : & CMr,

$$CQ : Qt = CM : Mr$$

$$z : \frac{bdz}{V\overline{z^2 - b^2}} = z + a : \frac{b^2 z dz + abdz}{zV\overline{z^2 - b^2}} = dx.$$

$$zdxV\overline{z^2 - b^2} = bzdz + abdz$$

$$\frac{zdxV\overline{z^2 - b^2}}{ab + bz} = dz = dy$$

Ou prenant dx pour conſtante, on trouvera $d^2 y = \overline{2abz^2 - ab^3 + 2bz^3 - b^3 z} \times dz\,dx : \overline{ab + bz}^2 V\overline{z^2 - b^2} - bzV\overline{z^2 - b^2} : \overline{ab + bz}^2 = \overline{2abz^2 - ab^3 + bz^3} \times dz\,dx : \overline{ab + bz}^2 V\overline{z^2 - b^2}$ & ſubſtituant la valeur de $dz = \overline{2abz^3 - ab^3 z + bz^4} \times dx^2 : \overline{ab + bz}^3$.

Or puiſqu'au point d'inflexion $yd^2 y = dx^2 + dy^2$. on aura en ſubſtituant à la place de y & de ſes differences leurs valeurs b, $\overline{z + a}$, $\overline{2az^3 - ab^2 z + z^4}$, $dx^2 : \overline{ab + bz}^3 = dx^2 + \overline{z^4 - bz^2}^2$, $dx^2 : \overline{ab + bz}^2$.

$$2az^3 - ab^2 z + z^4 = \overline{ab + bz}^2 + z^4 - b^2 z^2$$

$$2az^3 - ab^2 z + z^4 = a^2 b^2 + 2ab^2 z + z^4$$

$$2az^3 - ab^2 z = a^2 b^2 + 2ab^2 z$$

$$2az^3 - 3ab^2 z - a^2 b^2 = 0$$

2a

$$z^3 - \tfrac{3}{2} b^2 z - \tfrac{1}{2} ab^2 = 0$$

Fig. 115. D'où il eſt évident que ſi à une Parabole décrite du

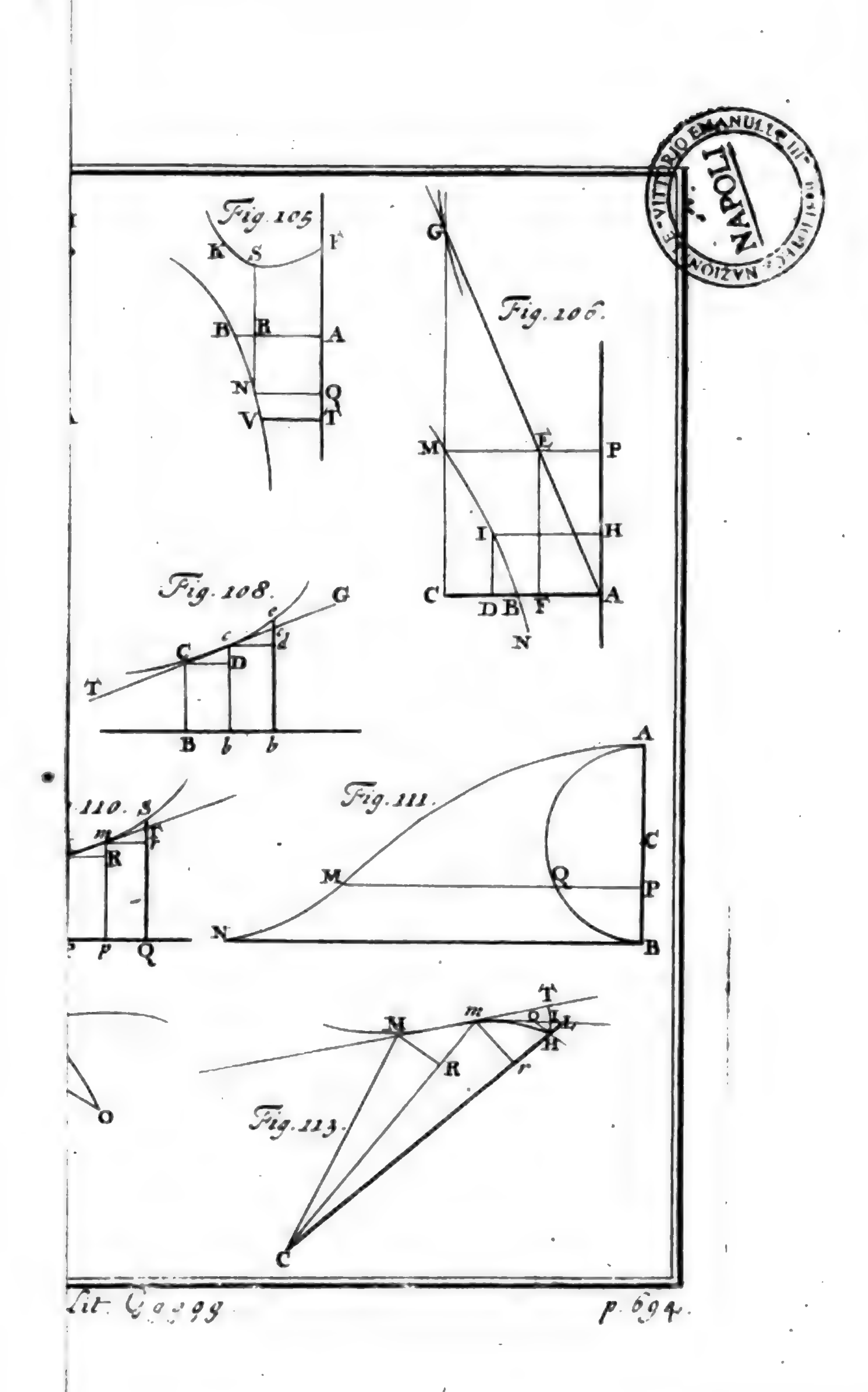


Fig. 105
K
S
F
B
R
A
N
Q
V
T
Fig. 106.
G
M
E
P
I
H
C
D
B
F
A
N
Fig. 108.
G
c
c
d
C
D
T
B
b
b
110.
S
m
R
p
Q
Fig. 111.
A
C
M
Q
P
N
B
T
m
M
L
H
R
r
O
Fig. 113.
C

parametre b, on prend sur l'axe la partie $AL = \frac{5}{4}b$, & qu'on applique perpendiculairement $LI = \frac{1}{4}a$, & que du centre I, & du rayon AI on décrive un Cercle, ce Cercle coupera la Parabole en M & donnera $PM = z$; car $\overline{AI}^2 = \overline{LI}^2 + \overline{AL}^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{25}{16}b^2$, & $MR = z - \frac{1}{4}a$, $AP = z^2 : b$, $IR = z^2 : b - \frac{5}{4}b$. Donc $\overline{AI}^2 = \overline{MI}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{IR}^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{25}{16}b^2 = \frac{z^4}{b^2} - \frac{10}{4}z^2 + \frac{25}{16}b^2 + z^2$

$- \frac{1}{2}az + \frac{1}{16}a^2$. Donc $\frac{z^4}{b^2} - \frac{6}{4}z^2 - \frac{1}{2}az = 0$

$$\left.\frac{z}{b^2}\right] \overline{z^3 - \frac{3}{2}b^2 z - \frac{1}{2}ab^2 = 0}$$

VII. Il arrive souvent dans ce Calcul que l'on ne prend pas dx, mais quelque autre comme dy ou dt pour constantes; les figures ci-jointes font connoître de quelle maniere on entend alors les secondes differénces, soit que les ordonnées partent du même point C, & qu'elles aillent en croisant, ou qu'elles soient paralleles entr'elles. Car Em étant la Tangente de la Courbe en Mm, si l'on fait dans le premier cas l'angle $EmH = mCn$, & qu'on tire les petites lignes nL, LI, gfK, paralleles à mS & Sn, on aura, en supposant $mS = MR$ ou dx constante, $Hn = d^2y$ & $HK = d^2t$. Si $mK = mn$ ou dt est constante, on aura $Kf = d^2y$, & $Sg = d^2x$. Enfin si on suppose $IL = mR$ ou dy constante, on aura $IS = d^2x$ & $LK = d^2t$.

Fig. 116. & 117.

Fig. 118. & 119.

Digitized by Google

CHAPITRE TROISIEME.

De l'Uſage de ce Calcul pour trouver les Dévelopées des Courbes & les Rayons de la Dévelopée.

Fig. 120. I. SI on conçoit une Courbe ACF entourée d'un fil, dont l'une des extrémités ſoit attachée en F, pendant qu'on le dévelope par ſon autre extrémité B, toujours tenduë, ce point B décrira une Courbe BM*m*, que l'on appelle la Courbe faite par le dévelopement; la premiere Courbe CCF s'appelle la Dévelopée, & les parties C*m* du fil tendu, qui ſont Tangentes de la Dévelopée & cenſées perpendiculaires à la ligne faite par le dévelopement, ſont appellés les Rayons de la Dévelopée. Ainſi la Dévelopée eſt le lieu des centres de tous les Cercles qui forment la Courbe faite par le dévelopement. Quelquefois ce n'eſt pas le Point B de l'extrémité, mais un autre comme A ou *a*, qui décrit la ſeconde Courbe; où il eſt évident qu'en l'un & l'autre cas le rayon de la Dévelopée eſt la partie de la Courbe BC + ou — BA.
a

Fig. 121. II. La ſeconde ligne AM*m* étant donnée, il eſt évident que ſi on détermine generalement la longueur du Rayon de la Dévelopée, on pourra trouver par là l'équation de la Dévelopée. Mais comme cette détermination eſt autre pour les Courbes, dont les demi ordonnées ſont paralleles entr'elles & perpendiculaires à l'axe, que pour celles dont les demi-ordonnées partent d'un même point, nous ne parlerons ici que du premier cas, qui ſuffit pour les exemples, qui ſerviront à une premiere connoiſſance.

Soit

Soit donc la Courbe AMm, & ses demi-ordonnées PM, pm, infiniment proches l'une de l'autre ; soit aussi le Rayon de la Dévelopée CM, & son infiniment proche Cm. Qu'on tire CE, parallele à AB, jusqu'à ce qu'elle rencontre la demi-ordonnée MP, continuée en E. Soit aussi MG parallele à AB; les angles E & R sont droits, de même que EMG & CMm; par conséquent EMC = GMm. Donc MR : Mm = ME : MC. Fig. 1717

$$dx : \sqrt{dx^2 + dy^2} = t : \frac{t\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx},$$

Or puisque l'on peut concevoir que le Rayon MC est constant, pendant qu'il décrit l'arc infiniment petit Mm, & que cependant ME augmente de la grandeur differentielle Rm, la difference de CM sera nulle. Mais en supposant dx constante la difference de MC sera $dtdx \sqrt{dx^2 + dy^2} : dx^2 + tdydxd^2y : \sqrt{dx^2 + dy^2}$, $dx =$

$$\frac{dtdx^2 + dtdy^2 + tdyd^2y}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

donc $dtdx^2 + dtdy^2 = -tdyd^2y$. Et à cause de PE, constante la difference de la demi-ordonnée mR est aussi la difference de ME ∴ $dt = dy$. Par conséquent $dx^2 + dy^2 = -td^2y$ donne $\overline{dx^2 + dy^2} : -dy = t$. Ainsi substituant dans cette formule les valeurs de dy^2 & $-d^2y$ tirées de l'équation de la Courbe, on aura celle de ME = t dans des grandeurs ordinaires. Après quoi pour déterminer le Rayon de la Dévelopée, la Soutangente PH étant $ydy : dx$ on formera l'analogie suivante:

$$MP : PH = ME : EC$$

$$y : \frac{ydy}{dx} = \frac{dx^2 + dy^2}{-d^2y} : \frac{dx^2dy + dy^3}{-dxd^2y}$$

Donc $\overline{EC}^{2} = \overline{dx^4 dy^2 + 2dx^2 dy^4 + dy^6} : dx^2 ddy^2$. Et

$$\overline{ME}^{2} = \frac{dx^4 + 2dx^2 dy^2 + dy^4}{ddy^2} = \frac{dx^6 + 2dx^4 dy^2 + dx^2 dy^4}{dx^2 ddy^2}$$ Par conséq.

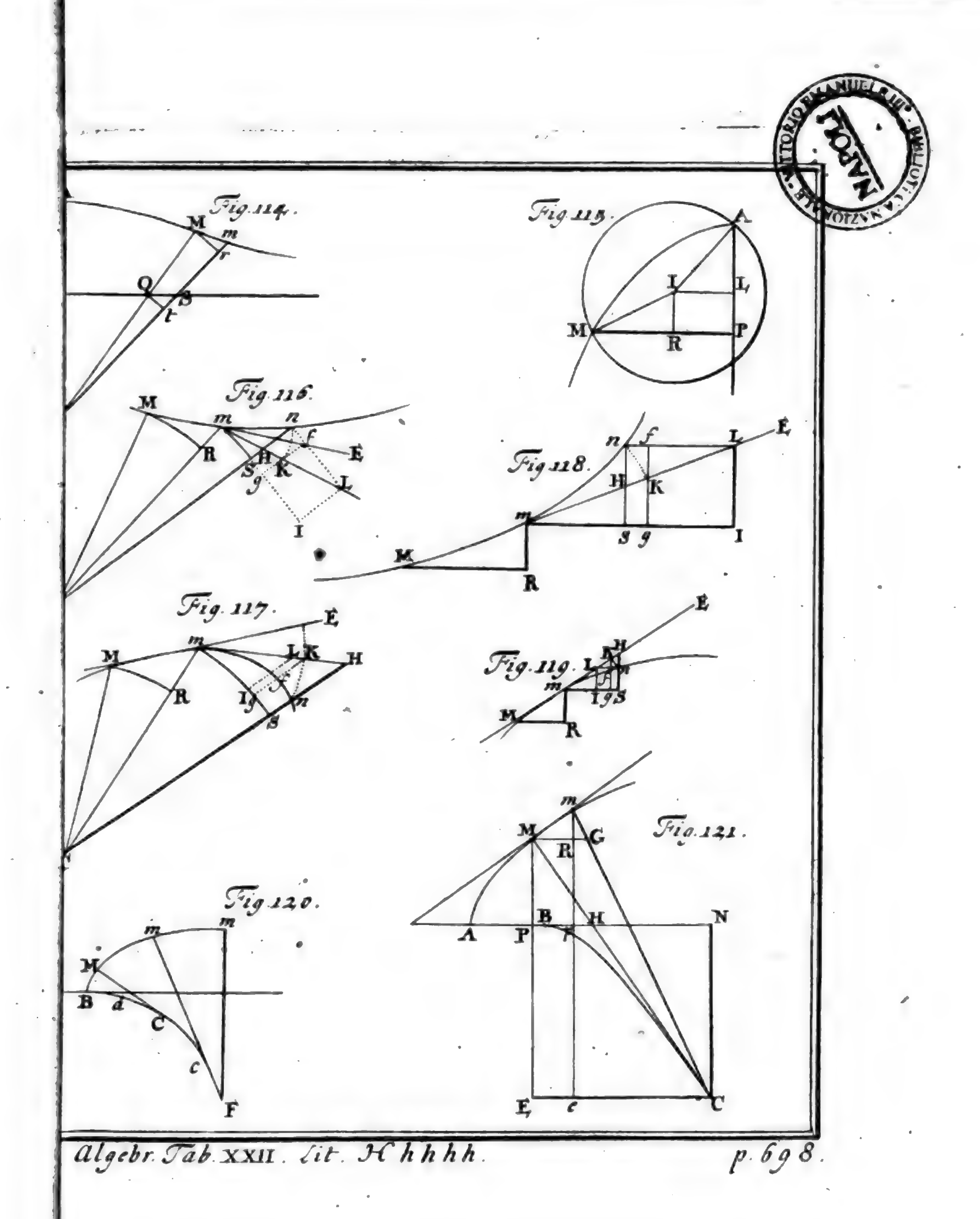
$$\overline{MC}^{2} = \frac{dx^6 + 3dy^2 dx^4 + 3dy^4 dx^2 + dy^6}{dx^2 ddy^2} =$$

$$= \frac{\overline{dx^4 + 2dx^2 dy^2 + dy^4} \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dx^2 ddy^2}$$

$$MC = \frac{\overline{dx^2 + dy^2} \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx d^2 y}$$

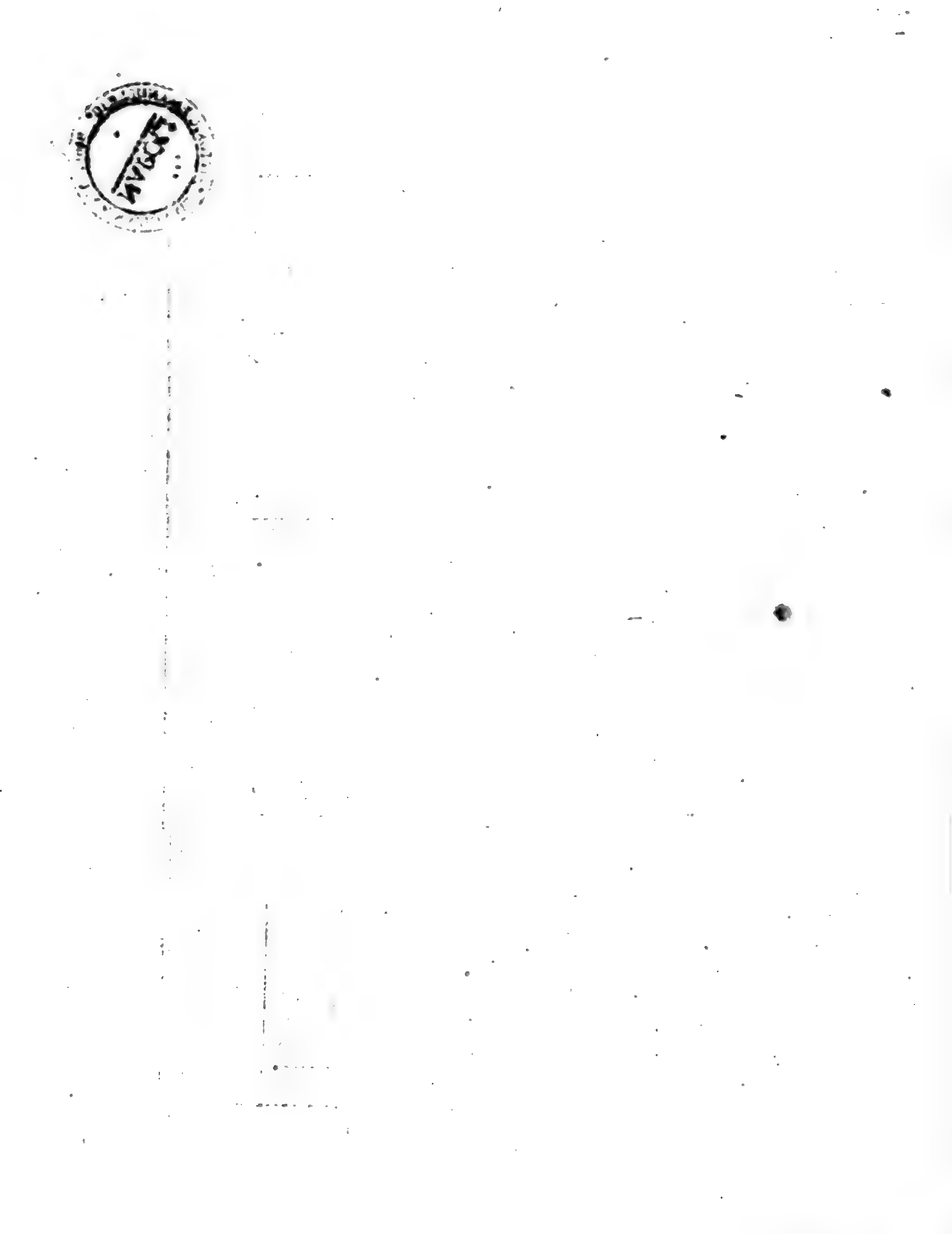
Cette détermination génerale supposée si l'équation Algebrique de la Courbe, formée par le dévelopement, est donnée, on trouvera l'équation de la Dévelopée en cherchant les valeurs de BN & de CN dans la valeur de l'abscisse AP, ou dans celle de la demi-ordonnée PM, ce qui ne souffre pas de difficulté. Car connoissant ME, comme nous venons de dire, si on en ôte PM, il restera PE = CN, à cause de PM : PH = ME:EC = PN. Mais si de AP + PN, on soustrait AB, qui est le Rayon de la Dévelopée au sommet B, & qui se trouve par la formule ci-dessus, le reste sera BN. Ainsi nommant BN $= u$, CN $= z$, la réduction des équations donnera celle de la Dévelopée en pures u & z constantes. Voici quelques exemples.

III. Pour trouver le Rayon de la Dévelopée de la Parabole & l'équation de sa Dévelopée, on sçait que $adx : 2y = dy$. Par conséquent, $\frac{a^2 dx^2}{4y^2} = dy^2 = \frac{adx^2}{4x}$ Or dx étant supposée constante on aura à cause de $adx : 2\sqrt{ax}$



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Algebr. Tab. XXII. lit. Hhhhh. p. 698.



$= dy$ sa differentielle $- adx^2 : 4x\sqrt{ax} = ddy$. Par conséquent $\frac{dx^2 + dy^2}{-d^2y} = \overline{4xdx^2 + adx^2} \times 4x\sqrt{ax} : 4axdx^2$ $= \overline{a + 4x}, \sqrt{ax} : a = \sqrt{ax} + 4x\sqrt{ax} : a = y + 4xy : a$ $= t = \text{ME} = \text{PM} + \text{PE}$. Mais PM étant $= y$ on aura $\text{PE} = 4xy : a$; & à cause de $x = y^2 : a$. $\text{PE} = 4y^3 : a^2$.

Voici la Construction. Puisque $\text{PM} = y$, on aura $\text{TP} = 2y^2 : a$. Or faisant au point T de la ligne MT la perpendiculaire TE, qui rencontre PM prolongée en E, vous aurez $\text{PE} = 4y^4 : a^2y = 4y^3 : a^2$. Après quoi élevant aux points E& M les perpendiculaires EC, MC, leur intersection déterminera en C la longueur du Rayon de la Dévelopée MC. On voit aisément qu'à cause des paralleles PH, EC on aura : *Fig. 121.*

$$\text{PM} : \text{PH} = \text{ME} : \text{EC}$$

$$y : \tfrac{1}{2}a = y + \frac{4xy}{a} : \tfrac{1}{2}a + 2x$$

Donc $\overline{\text{EC}}^2 = \frac{1}{4}a^2 + 2ax + 4x^2$

Et $\overline{\text{ME}}^2 = ax + 8x^2 + 16x^3 : a$

Par conséq. $\overline{\text{MC}}^2 = \frac{1}{4}a^2 + 3ax + 12x^2 + 16x^3 : a$.

Or MC tombant sur AB, $x = 0$. Donc $\overline{\text{AB}}^2 = \frac{1}{4}a^2$, & $\text{AB} = \frac{1}{2}a$; par conséquent $\text{BN} = \text{AP} + \text{PN} - \text{AB} = 3x$. Ce qui étant supposé $= u$ & CN ou PE $= z$ on aura :

$$u = 3x$$

$$\tfrac{1}{3}u = x$$

$$z = 4x\sqrt{ax} : a$$

$$z = \tfrac{4}{3}u\sqrt{ax} : a$$

$$3az = 4u\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,au$$

$$9a^2z^2 = \tfrac{16}{3}au^3$$

$a:3$

$$27az^2 = 16u^3.$$ Cette équation fait voir que la Dévelopée de la Parabole ordinaire est une Parabole du second genre, dont le parametre est à celui de la Parabole ordinaire comme 27 est à 16.

IV. Pour la Dévelopée du Cercle on sçait d'abord que l'équation $y^2 = 2rx - x^2$ donne

$ydy = rdx - xdx$. Or supposant dx constante nous aurons $dy^2 + yd^2y = -dx^2$

par conséq. $\overline{dx^2 + dy^2} : y = -d^2y$

donc $$\frac{dx^2 + dy^2}{-d^2y} = \frac{y,\overline{dx^2 + dy^2}}{dx^2 + dy^2} = y.$$

Ainsi $MC = y$ & le point C tombe en P, ou au centre du Cercle. Par conséquent dans ce cas le Rayon de la Dévelopée est égal à celui du Cercle, & la Dévelopée est le Centre.

V. Si la Courbe, dont on cherche la Dévelopée & le Rayon, est une Ellipse ou une Hyperbole, à laquelle $ay^2 = abx \mp bx^2$ on aura, le calcul fait, $dy = \overline{abdx \mp 2bxdx} : 2\sqrt{a^2bx \mp abx^2}$; & supposé dx, constante

$$ddy = \frac{-a^3b^2dx^2}{\overline{4a^2bx \mp 4abx^2} \times \sqrt{\overline{a^2bx - abx^2}}.}$$ Et mettant ces valeurs

dans la formule génerale de MC on trouvera:

$$MC = \frac{a^2b^2 \mp 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx \mp 4abx^2 \times \sqrt{a^2b^2 \mp 4ab^2x + 4b^2x + 4a^2bx \mp 4abx^2}}{2a^3b^2.}$$

Mais puiſque dans toute Courbe Algebrique la perpendiculaire MH $= \frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$. Si dans cette formule generale on ſubſtitue les valeurs de y & dy^2, on trouvera que la ligne MC $= \frac{4\overline{MH}^3}{bb}$. Ainſi la quatriéme continuellement proportionelle au Parametre b & à la perpendiculaire MH, priſe quatre fois, déterminera le Rayon MC. Si l'on fait $x = 0$ on aura AB $= \frac{1}{2}b$. Et ſi dans l'Ellipſe x devient $= \frac{1}{2}a$ on trouvera DG $= \frac{a\sqrt{ab}}{2b}$, c'eſt-à-dire, égale à la moitié du Parametre du petit axe. Ce point G eſt un point de rebrouſſement dans la Dévelopée de l'Ellipſe. Fig. 123.

VI. Pour chercher la Dévelopée de la Cycloide & ſon Rayon, ſoit dans la Cycloide AMB le diametre du Cercle generateur $= 1$, AP $= x$, PM $= y$, on aura QP $= \sqrt{x-x^2}$, & l'arc AQ $=$ S. $dx : 2\sqrt{x-x^2}$; par conſéquent PM $=$ PQ $+$ QM $= \sqrt{x-x^2} +$ S. $dx : 2\sqrt{x-x^2}$. Fig. 124.

Donc $y = \sqrt{x-x^2} +$ S. $dx : 2\sqrt{x-x^2}$

$$dy = \frac{dx - 2x\,dx + dx}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{dx - x\,dx}{\sqrt{x-x^2}} =$$

$dx, \overline{1-x} : \sqrt{x}, \sqrt{1-x} = dx, \sqrt{1-x} : \sqrt{x}$ & $dy^2 = dx^2, \overline{1-x} : x$ & prenant dx pour conſtante on aura $ddy = -dx^2\sqrt{x} : 2x, \sqrt{1-x} - dx^2\sqrt{1-x} : 2\sqrt{x} =$

$$\frac{-2x\,dx^2 - 2dx^2 + 2x\,dx^2}{4x\sqrt{x-x^2}} = \frac{-dx^2}{2x\sqrt{x-x^2}}$$

Ainſi ſubſtiruant dans la formule génerale de MC, trouvée ci-deſſus, les valeurs de dy^2 & ddy on aura MC

$$= \frac{dx^3}{x\sqrt{x}} : \frac{dx^3}{2x\sqrt{x-x^2}} = 2xdx^3\sqrt{x-x^2} : xdx^3\sqrt{x} = 2\sqrt{x-x^2}$$

$$: \sqrt{x} = 2\sqrt{1-x} = 2\,DQ.$$

Pour conſtruire cette Dévelopée on remarquera d'abord que la Tangente TM eſt parallele à la Corde AQ, comme il eſt évident par ce que nous avons dit de la Quadrature de la Cycloide ; par conſéquent l'angle TMQ = AQP ; & à cauſe des deux droits AQD, TMC le Rayon MC eſt parallele à la Corde DQ. De cette maniere on pourra déterminer tous les points que l'on voudra de la Dévelopée BCG ; & on trouvera en ſuppoſant $x = 0$ le rayon 2AD = AG, au lieu que ſi on ſuppoſe $x = 1$, on trouve le Rayon de la Dévelopée = 0. D'où il eſt évident que cette Dévelopée ſe termine de part & d'autre aux points B & G. De plus tirant BL & CL paralleles à MC & DB on aura les lignes DQ, ME, EC, BL égales ; ainſi décrivant ſur BF un demi Cercle, l'arc BL ſera égal à l'arc DQ. Mais DE étant = QM = l'arc AQ, EB = l'arc DQ. Mais à cauſe de EB = CL, cette même CL égalera l'arc BL ; par conſéquent le point C eſt à une Cycloide. Ainſi la Dévelopée de la Cycloide AMB eſt une autre BCG, qui lui eſt ſemblable & égale ; mais poſée d'un ſens contraire.

F I N.

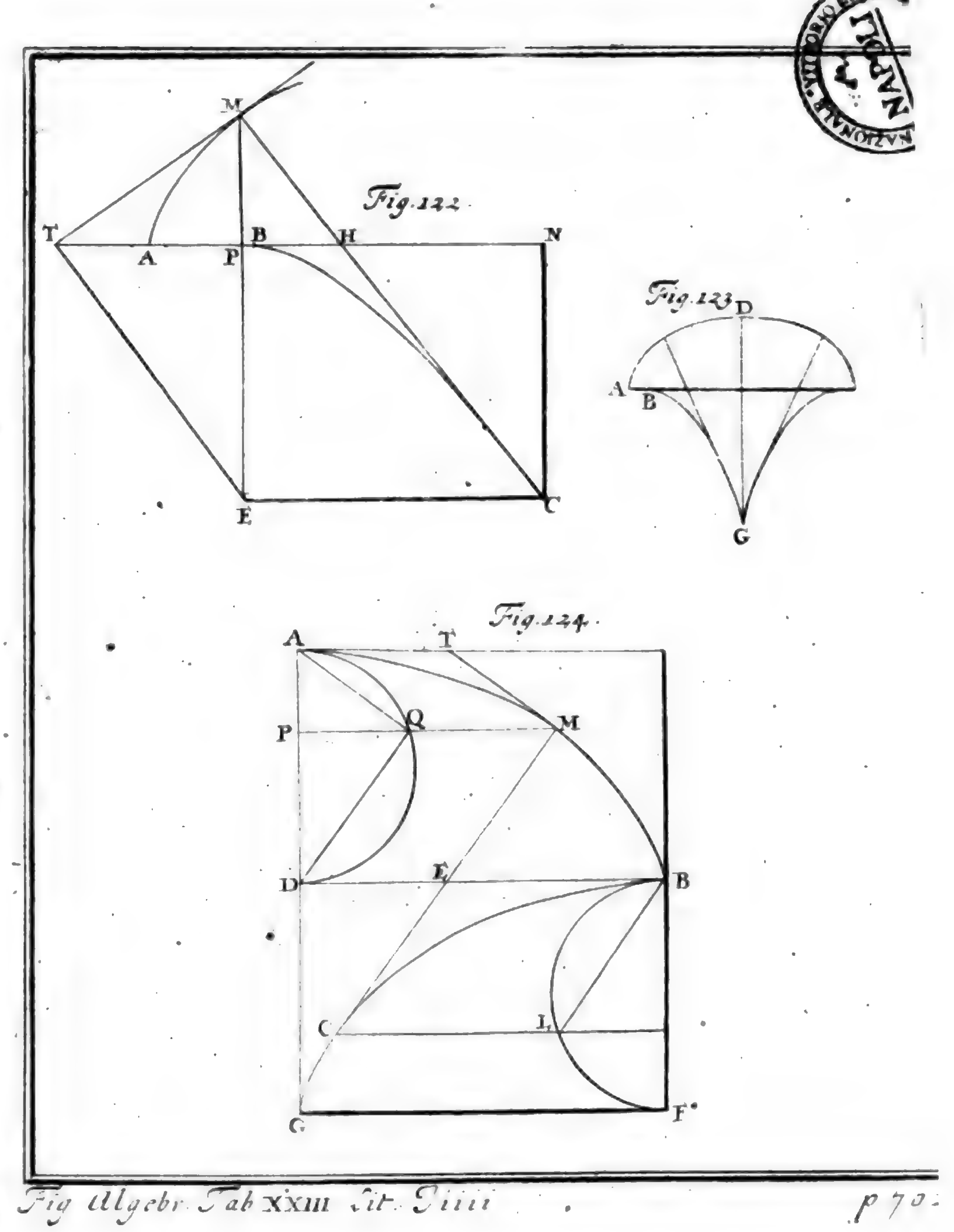
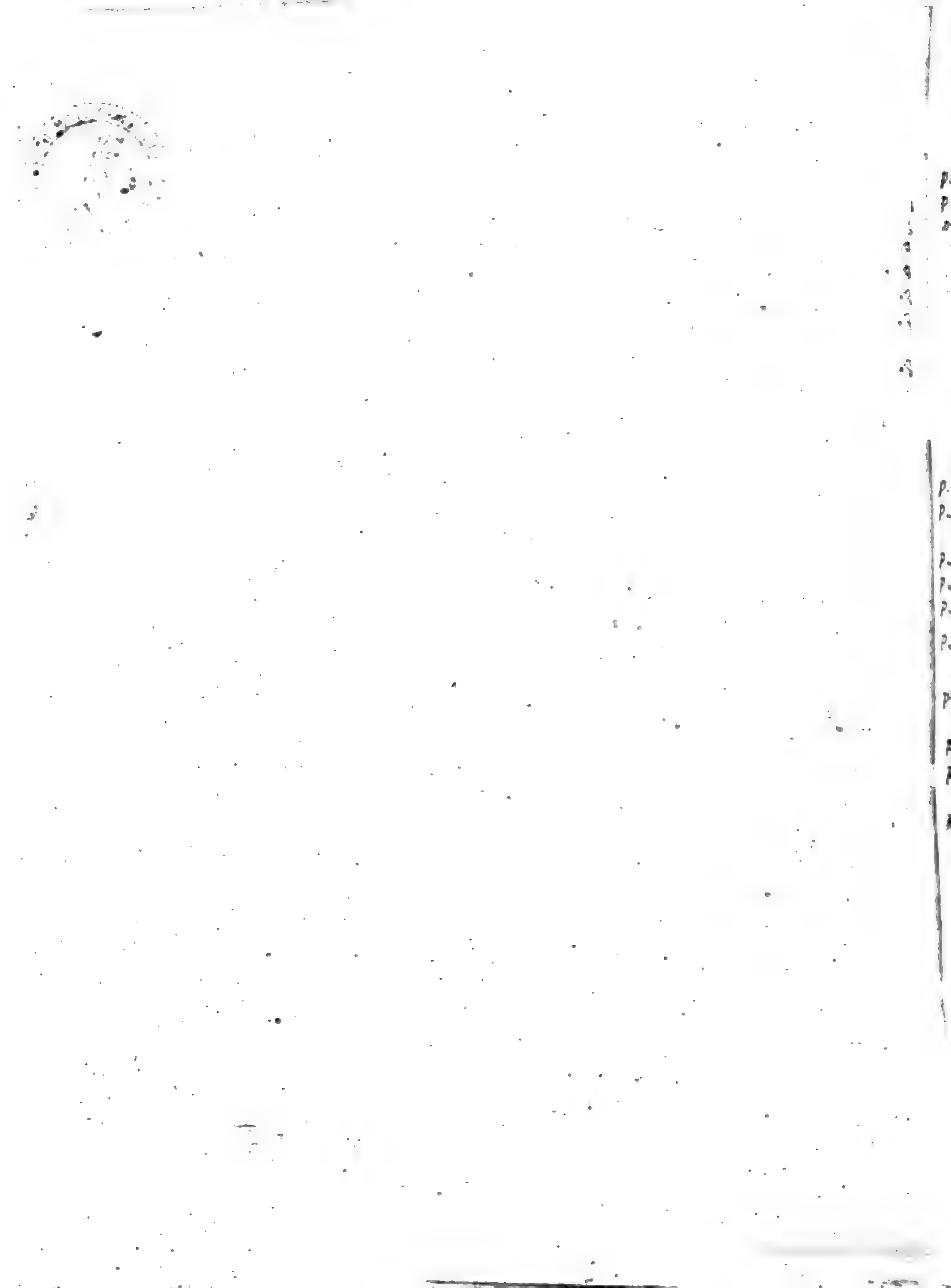


Fig. Algebr. Tab. XXIII. Lit. Iiiii

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE



Fautes à corriger dans l'Algebre.

p. 497. l. 14. quelquune *Lisez* quelqu'une
p. 500. l. 13. Les questions Les Equations
p. 501. l. 5. $=0$, $=0$;
p. 504. l. 18. $-p$ $+p$
p. 506. l. 14. $+\frac{11}{63}x$ $+\frac{11}{36}x$
p. 509. l. 23. ces ses
p. 517. l. 1. $+p$ $-p$
l. ult. $+32$ -32
p. 518. l. 1. f f^o
l. 2. par $ff=25$ par $ff-25$
l. 7. Donc 6 Donc g
l. 8. $18x$ $18x^2$
l. 11. teduite réduite
p. 521. l. 12. ehercher chercher
p. 523. l. 7. fnbstitution substitution
l. 11. donc ses dont les
p. 524. l. 20. condition conditions
p. 527. l. 13. cares cas
p. 532. l. 5. Ou On
p. 533. l. 13. $\frac{ge}{e}$ $\frac{gc}{e}$
l. 15. $a-bx$ $a-b:x$
p. 539. l. 5. $d=r$ $d-r$
l. 24. isoscelle isoscele
p. 540. l. 7. $AC=\frac{1}{2}d \quad r$ $AC=\frac{1}{2}d-r$
p. 546. l. 2. $\overline{Fc}^2$ $\overline{fc}^2$
l. 3. FC Fc
p. 547. l. 3. y^r, on y. On
l. 4. sur Solide Sursolide
l. 6. , ainsi . Ainsi.
l. 8. geometr. Geometr.
l. 14. $\frac{cy}{s}$ $\frac{ey}{s}$
p. 548. l. 14. $\frac{ep^2}{d}$ $\frac{e^2p}{d}$
p. 549. l. 2. $\frac{zepx}{s}$ *doit être dans la ligne*
l. 14. Puisqu' *Lisez* puisqu'

p. 551. l. 15. Si dans l'Ellipse, &c. *doit être un à linea*
l. 16. La *Lisez* la
p. 552. l. 12. $\frac{1}{4}s^2c^2b^2$, &c. u: $\frac{1}{4}a^2c^2b^2$
u : ——
p. 553. l. 2. s^2c^2u s^2c^2u
l. 12. Mg MG
HN, l'Ord. HN l'Ord.
p. 557. l. 2. DN^2 DN^2
l. 18. *à la marge* ajoûtez *Fig. 22.*
p. 558. l. 2. IFDS *Lisez* IF. DS
l. 6. $\frac{1}{2}dx+x$ $\frac{1}{2}d+x$
p. 559. l. 4. b^4u b^4u^2
p. 560. l. 8. BC BD
p. 563. l. 3. rectiligne rectangle
l. 13. xy, si xy. Si
p. 564. l. 15. Coupée coupée
p. 566. l. 17. *Mettez un renvoy à la page* 601.
l. 24. courbe *Lisez* Courbe
p. 567. l. 17. infinie, donc BC, est infinie. Donc BC est
p. 568. l. 23. donné, donné
p. 584. l. 12. y, l'Equation y. L'Equation
p. 594. l. 18. $+\frac{r}{2a^2}=0$ $+\frac{r}{2a^2}=d$
p. 597. l. 2. fera sera
l. 10. Cd CD
p. 605. dern. col. l. 9. x^{32}: $x^{\overline{3:2}}$
p. 608. l. 4. grandners grandeurs
p. 611. l. 8. $ydy:x$, $ydx:x$.
p. 617. l. 5. se'leve s'éleve
p. 623. l. 1. 4^3a $4a^3$
p. 624. l. 1. ax^2 ax^3
p. 625. l. 5. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$.
p. 629. l. 14. 2. col. $+\frac{2ab}{c}+$ $+\frac{2ab}{c}x+$
l. 16. 2. col. $X\overline{a+\frac{1}{b}cx^3}^2$ $X\overline{a+\frac{1}{b}bx^3}^2$

Digitized by Google

p. 630. l. 19. $x^{-\frac{1}{2}+1}$ *Lisez* $x^{-\frac{1}{2}+1}dx$

p. 631 *est mal cottée* 626

l. 13. $\frac{1}{2}X\overline{a^2dx + 2bxdxXa^2x + bx2}^{\frac{1}{2}}$ *Lisez*

$\frac{1}{2}X\overline{a^2dx + 2bxdx}X\overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$

l. 16. $\frac{2}{3}X\overline{aa + xx^2}^{\frac{3}{2}}$ $\frac{2}{3}X\overline{aa + xx}^{\frac{3}{2}}$

p. 633. l. 20 $- a^{m-s}$. a^{m-s}

l. 22. ſuite. ſuite

p. 634. l. 2. $^{m-2}_{a}$. a^{m-2}

p. 635. l. 16. $P^{\frac{m}{n}}$ $P^{\frac{m}{n}}$

p. 636. l. 1. $= \frac{-x^2}{8a^3}$ $= \frac{-x^4}{8a^3}$

p. 641. l. 21. & 23. $\frac{7}{250}x^{10}dx$ $\frac{7}{256}x^{10}dx$

p. 643. l. 5. $\frac{x^3}{2a}$ $\frac{x^2}{2a}$

l. 13. eCrcle Cercle

p. 645. l. 6. $\frac{1}{2}ap$ $\frac{1}{4}ap$

p. 646. l. 2. $x = uy$ $x^2 = uy$

l. 18. $ydx:=$ $ydx=$

p. 648. l. 1. $:a$ $:a^2$

l. 4. $=$ $-$

p. 649. l. 12. $\frac{1}{27}\sqrt{4}$ $\frac{4}{27}\sqrt{4}$

l. 18. recrification rectification

p. 650. l. 14. y^2dy y^8dy

p. 651. l. 15. $\frac{1,3,5,7}{2,4,6,8}$ $\frac{1,3,5,7}{4,4,6,8}$

l. 17. $\frac{1,3,5,7}{2,4,6,8,6}$ $\frac{1,3,5,7}{2,4,6,8,9}$

p. 654. l. 8. La la

l. 9. p, on p. On

p. 660 l. 11. $\sqrt{dx^2+dy^2}$, on $\sqrt{dx^2+dy^2}$. On

p. 662. l. A. ar, pour ar. Pour

l. 21. ſoit ſont

p. 665. l. 6. $\frac{1}{4}x$ $\frac{1}{4}x^4$

l. 24. pour tout par tout

p. 667. l. 1. cercle centre

l. 11. terminer déterminer

p. 668. l. 2. MMHS MNHS

l. 23. $px_2dx:2r$, ainſi $px^2dx:2r$. Ainſi

p. 674. l. 17. $\frac{1}{3}a$ $\frac{1}{3}a$

p. 676. l. 3. $ay^{-1}dx$ $ay^{-1}dy$

p. 677. l. 15. place $-y$ place de $-y$

p. 681. l. 20. ax a^x

p. 682. l. dern. $qydy$ $pydy$

p. 685. l. 20 ay ay

p. 686. l. 3. prolongé prolongée

p. 689. l. 21. vcrs vers

p. 690. l. 4. < Par <. Par

l. 18. l'abſciſſe l'abſciſſe AP

p. 692. l. 7. $\frac{3}{4}b$ $\frac{4}{3}b$

l. 8. donné donnée

l. 12. *marge* 123 113

p. 693. l. 10. xemarquer remarquer

p. 694. l. 1. Les les

l. 5. CQt: CQT.

l. 19. bz^{22} b^2z^2

Fautes remarquées à la derniere Réviſion.

ARITHMETIQUE.

Pag. 5. *lin.* 3.	colonne	*Liſez*	colonnes
p. 10. *l.* 17.	douxiéme		douziéme
p. 13. *l.* 6.	196 liv.		199 liv.
p. 31. *après l.* 21.		*Ajoûtez*	Si le décompte eſt à faire en dedans on dira $104\frac{1}{4}$ — 100 — 38964.
p. 32. *l.* 8.	40	*Liſez*	48
p. 39. *l.* 7.	40		43
p. 48. *l.* 14.	40	*mettez*	un nombre quelconque depuis 12 à 20
ib. *l.* 16.	1 : 3	*Liſez*	3 : 1
ib. *l.* 18.	de l'un		de l'une
ib. *l.* 20.	la ſomme de tous les		le nombre des
ib. *l.* 21.	ſçav. comb. elle a de termes &		trouver
ib.	dernier	*ajoûtez*	& la ſomme de tous
ib. *l.* 23.	un moy. prop.	*Liſez*	une moyenne proportionelle
ib. *l.* 26.	& ſuiv.	*Effacez*	leur ſomme, trouver
ib. *l.* 27.	termes	*Liſez*	termes, trouver leur ſomme
ib.	du dernier		de chacun

GEOMETRIE.

p. 53. *l.* 6.	grandeur que	*Liſez*	grandeur ; que
l. 7.	conçoit , ou		conçoit ou
p. 56. *l.* 23.	égales		égales en tout ſens
p. 60. *l.* 11.	prit		pris
p. 62. *l.* 4.	Il en eſt, &c.	*Liſez tout cet Article*	Et les angles A & D étant égaux, la ligne AC ſe trouvera dans la direction de la ligne DF. Enfin ces deux lignes étant égales, le point C ſe rencontrera avec le point F. Donc la ligne BC tombera préciſement ſur EF; l'angle B ſur l'angle E; & l'angle C ſur l'angle F. Par conſéquent ces deux triangles ſeront égaux en tout ſens.
p. 72. *l.* 13.	pieds, lequel	*Liſez*	pieds. Lequel
p. 76. *l.* 5.	parties	*Ajoûtez*	égales
p. 77. *l* 9.	AF	*Liſez*	AE
p. 92. *l.* 19.	*on ajoûte*		*on en ajoûte*
p. 99. *l.* 4.	AECB		AECD
p. 100. *l.* 7.	ED		ED[d].
ib. *l.* 16.	On dit qu'une		Une
p. 104. *l.* 23.	diametre , &		diametre ; &
p 111. *l.* 14.	*unt*		*une*
l. 25.	*marg.* I, 25.		I, 29.

p. 118. l. 2. $xd + \frac{?}{4} d^{?}$ *Lisez* $xd + \frac{1}{4} d^{2}a$

p. 119. l. ult. *Ajoûtez* par conséq. $\sqrt{r^2 - y^2} = CF$ & $\sqrt{d^2 - y^2} = AF$

p. 126. l. 4. harmonique Harmonique

p. 130. l. 7. *Ajoûtez* ou A : B — A = C : D — C

p. 134. l. 1. *dividendo* Lisez *convertendo*

p. 138. l. 24. donné donnée

p. 130. l. 19. *Si l'on, &c.* *Si l'on compare deux grandeurs à differents égards, ensorte que d'un sens elles soient entr'elles comme* a : b ; *& d'un autre sens comme* e : f ; *ces deux grandeurs sont entr'elles en raison composée des deux raisons susdites. C'est-à-dire, comme le produit des deux antecedents est au produit des deux conséquents.*

p. 143. l. 19. *marg.* 150 *Lisez* 160.

p. 144. l. 4. *marg.* III. 7. c. 2. III. 4. c. 2.

ib. l. 14. *marg.* [8] II. 18. [8] I 18.

p. 147. l. 7. poligoue poligone

ib. l. 20. 120 120°

p. 148. l. 21. *marg.* II. 22. I. 22.

p. 169. l. 9. Dont D'où

p. 171. l. 7. une pyramide dont la base un amas de Pyramides, dont la somme des bases

p. 180. l. der. *Ajoûtez* $= mcx^2$

p. 185. *marg.* *Planche* B doit être vis-à-vis lin. 8.

p. 187. l. 30. quatres *Lisez* quatre

p. 188. l. 12. *de même.*

TRIGONOMETRIE.

p. 192. l. 5. DE *Lisez* DF

p. 195. l. 19. $2fbcd + f^2 b^2$ $2fbcd + b^2 d^2 + f^2 b^2$

p. 196. l. 6. si on soustr. sa si on en soustr. la

p. 199. l. 2. elle de elle est de

ib. nobre nombre

ib. l. 13. premiers premieres

ib. l. 14. Ensuit Ensuite

p. 204. l. 17. l'une de l'une &

MECHANIQUE ET HYGRONOMIE.

p. 217. l. 15. mechanique *Lisez* Mechanique

l. 18. résistence résistance

l. 20. hygronomie Hygronomie

p. 218. l. 12. le terre la Terre ;

p. 221. l. ult. par- partie

p. 222. l. 19. BC, BC ;

l. 21. E. Si		*Lisez*	E, si
p. 224. *l.* 9. cettte			cette
l. 15. OR : BF = SX : ED			OR : SX = BF : ED
p. 226. *l.* 15. 19. 29. terre			Terre
p. 229. *l.* 6. une une			une
p. 233. *l.* 6. composée			composé
l. 21. Or			Car
l. 24. sera			étant
l. 25. *après* à AD,		*Ajoûtez*	puisque *ci* est égale à *c*NB, EK sera égale à ENB,
p. 234. *l.* 12. $\surd CB : \surd DB$		*Lisez*	$\sqrt{CB} : \sqrt{DB}$
p. 236. *l.* 14. AC, EC;			AC : EC ;
p. 237. *l.* 24. oscilation			oscillation
p. 238. *l.* 2. $\frac{a}{b}$			$\frac{b}{a}$
p. 239. *l.* 13. 22. terre			Terre
p. 240. *l.* 16. l'axe &			l'axe ; &
ib. tangeante			tangente,
ib. *Fig.* 39.			vis-à-vis *l.* 20.
l. 23. AD, donc		*Lisez*	AD. Donc
p. 242. *l.* 7. Dont			D'où
p. 243. *l.* 7. $b^2 c^2$			$b^2 c^2$
Tab. V. au bas		*mettez*	Tab. VI. *Ec. b. p.* 244.
Suppl. p. 243. *l.* 23. $\surd a^2 + b^2$			$\sqrt{a^2 + b^2}$
p. 245. *l.* 5. x, n^2			x, n^3
p. 246. *l.* 6. n'ont			ont
l. 10. Ie			le
l. 26. leur vitesse			leurs vitesses
ib. leur direction			leurs directions
p. 250. *l.* 28.		*effacez*	A
Planche VII. *Fig.* 47. A. o		*Lisez*	A. 3.
p. 251. *l.* 15. AB			A, B.
ib. *l.* 17. BC, si			BC. Si
ib. *l.* 22. premier			dernier
p. 254. *l.* 7. on compte			on en compte
p. 256. *l.* 22. soit			soient
p. 258. *l.* 25. F			G
p. 259. *l.* 20. B, la			B, tenant celui du rayon de la roüe ; la
p. 261. *l.* 3. la chappe			sa chappe
p. 262. *l.* 13. entce			entre
p. 263. *l.* 10. résistence			résistance
ib. *l.* 30. grands			gros

p. 267. l. 11. mouvement; ainsi *Lisez*	mouvement. Ainsi
p. 268. l. 9. le choc & le ressort	le ressort & le choc
p. 275. l. 2. des deux	de deux
p. 278. l. 7. continueront	concoureront
ib. l. 10. aisement. Pourvû	aisément; pourvû
premiere	plus legere
p. 281. l. 11. les masses	les produits des masses
p. 287. l. 6. terrein on	terrein, on
ib. l. 7. conduit de	conduit
p. 294. l. 20. le niveau	Le niveau
ib. l. 26. terre	Terre
p. 196. l. 11. cuire	cuir
p. 297. l. 11. une colonne qui ait pour base l'ouverture F	la colonne qui est au dessus
p. 299. l. 16. corne	cornuë

FORTIFICATION.

p. 318. l. 14. BE *Lisez*	BF
p. 326. l. 29. & 30. dehors	Dehors
p. 328. l. 30. voisines &	voisines; &
p. 331. l. 1. place de	place à
p. 337. l. 29. Arcenaux	Arsenaux
p. 338. l. 3. troupes	poudres
p. 340. l. 21. jousqu'	jusqu'
p. 342. l. 26. des grosses	de grosses

ARCHITECTURE CIVILE.

p. 349. l. 25. achevé à	achevé de
p. 352. l. 14. axant becs	avant-becs
p. 357. l. 3. croit	croisse
p. 358. l. 7. meubles, l'aune	meubles. L'aune
p. 362. l. 2. p, de part	p; & portant de ce point p de part
ib. l. 23. rondes	ronde
ib. l. 28. en tirant	& tirant
p. 363. l. 14. chaussée; si	chaussée, si
ib. bons, on	bons; on
p. 364. l. 12. force des	force de
p. 369. l. 15. sant	sans
p. 373. l. 17. de rez	du rez
p. 381. l. 19. est $\frac{6}{7}$	est $\frac{5}{8}$

Nota depuis p. 392 on a recommencé le nombre des pages par 273.

p. 378. Pl. X. Bbb. Le Graveur ayant retardé de plus d'un an l'expedition de

Digitized by Google

cette Planche, il a enfin contourné à gauche tout ce qu'il y a de Rubans & Feüilles aux Baquettes, &c. de même que les Guillochis & Postes. C'est aussi au seul caprice de cet Ouvrier qu'on est redevable de la difformité des Lettres & des Chiffres, qui se rencontrent par-tout.

Pl. XI. *Ccc.* devroit être marquée *p.* 375. & mise immédiatement après la précedente Bbb.

p. 385.	*l.* 29.	celles	*Lisez*	celle

Pl. XIV. *Fig.* 43. *mettez au bas de la perpendiculaire ponctuée* H

p. 488.	*l. ult.*	blanc	*Lisez*	blanc
p. 390.	*l.* 4.	batiment, les		batiment. Les
ib.	*l.* 5.	confusion,		confusion ;
p. 392.	*l.* 17.	non obstant		à cause de
p. 374	*l.* 28.	admet des		admet de

PERSPECTIVE.

p. 382.	*l.* 7.	de ses	de ces
p. 386.	*l.* 17.	paralleles, en	paralleles. En

COSMOGRAPHIE.

p. 422.	*l.* 11.	il y a		il y en a
p. 436.	*l.* 8.	égale		égal
p. 446.	*l.* 5.	centre on		centre, on
ib.		Cercles où		Cercles, où
p. 447.	*l.* 19.	Ou		Oh

p. 457. *Ajoûtez après n. XI.* Le Port de mer, qui est une petite Baye, où les vaisseaux sont en sureté.

p. 458.	*l.* 21.		*Effacez*	& Malacco
p. 461.	*l.* 23.	de Duc	*Lisez*	du Duc
p. 464.	*l.* 17.	Malabar		Coromandel
p. 468.	*l.* 30.	est		étoit
ib.	*l.* 32.	Parme	*Ajoûtez*	& Plaisance
p. 471.	*l.* 29.	Dalmatie		outre Zeng & le païs des Uscocks, qui est à l'Emp.
p. 472.	*l.* 16.	la Rel. est		presque toute
p. 475.	*l.* 19.	Tanguebar	*Lisez*	Tranquebar
ib.	*l.* 21.	Narsigna		Narsinga
p. 476.	*l.* 31.	dequis		depuis
p. 479.	*l.* 1.	de Senegail		du Senega
p. 483	*l.* 27.	on		On

ALGEBRE.

p. 496. l. 14.		*Effacez* d'abord
p. 500. l. 7. 2. Col.	$41 + 5448$	*Lisez* $451 + 448$
ib. l. 7. 1. Col.	$45r$	$14r$
ib. l. 11. & 12.	$+ 28$	$- 18$
p. 501.	de deux &	*Lisez* de deux en
p. 502. l. 4.	$16x$	$26x$
p. 504. l. 7.	$\frac{npy^3}{m}$	$\frac{npy^2}{m}$
p. 507. l. 3.	$\frac{1}{2}a^4b$	$\frac{1}{2}a^2b$
l. 4.	$x^3\sqrt{2}$	$x\sqrt{2}$
p. 508. l. 20.	$+ 14$	$+ 15$
p. 509. l. 15.	$\frac{1}{1}p$	$\frac{1}{2}p$
p. 510. l. 8.	$\frac{1}{27 p^3}$	$\frac{1}{27}p^3$
p. 512. l. *avant dern.* 1. col.	$\frac{1}{1}q$	$\frac{1}{2}q$
p. 513. l. 1.	$g +$	$g + f$
l. 7	$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}p}$	$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q}$
p. 514. l. 8.	$6t^2u$	$6t^2u^2$
p. 515. l. 3	repreſenté	repreſentées
l. 16.	ſont	ſon
l. 17.	$\frac{r}{6}$	$\frac{r}{3}$
p. 518. l. 1.	$64f.$	$64f^4$
l. 10.	$- 4x^6$	$+ 4x^2$
l. 23.	$3x^3$	$3x^2$
p. 526. l. 9.	$x + r$	$x^3 + r$
p. 529. l. 10.	$x^4 >$	$x^4 <$
l. 11.	$x >$!	$x <$
p. 530. l. 24.	$x^3 -$	$x^3 =$
p. 531. l. 5.	$- 3aab$	$- 3abb$
l. 6.	$= 6abc$	$= - 6abc$
l. 7.	$= 3bbc$	$= - 3bbc$
p. 533. l. 1.	$\frac{46}{100}$	$\frac{48}{100}$
p. 541. l. *dern.* AG		AG^2
p. 543. l.	$- \overline{\frac{1}{2}dr}^2$	$- \overline{\frac{1}{2}d - r}^2$
p. 546. l. 2.	$a + b + n$	$a + d + n$
p. 550. l. 6.	$d - x$	$\frac{1}{2}d - x$
p. 591. l. 13.	$- + af$	$- af$

Digitized by Google

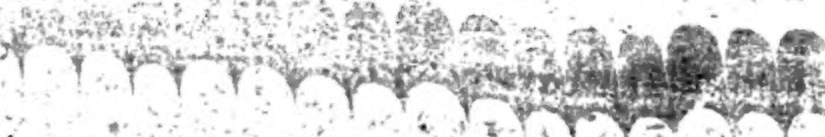
Digitized by

v. To.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google